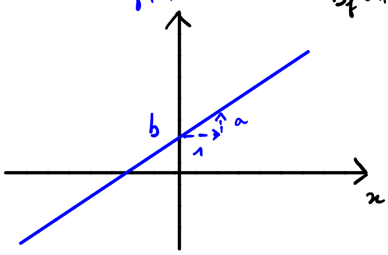
CHAPITRE 6 : FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

I CATALOGUE DES FONCTIONS ÉLÉMENTAIRES

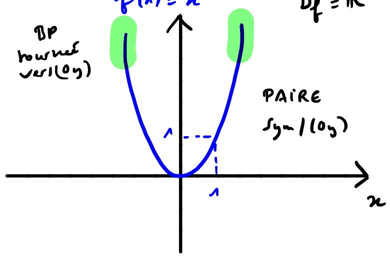
$f(x) = ax + b$ $\quad D_f = \mathbb{R}$



a = pente = coefficient directeur

b = ordonnée à l'origine = $f(0)$

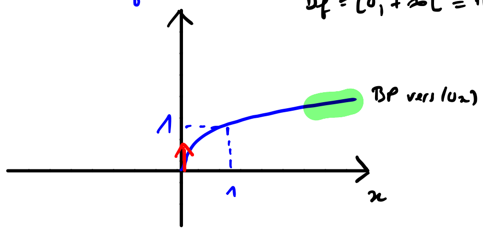
$f(x) = x^2$ $\quad D_f = \mathbb{R}$



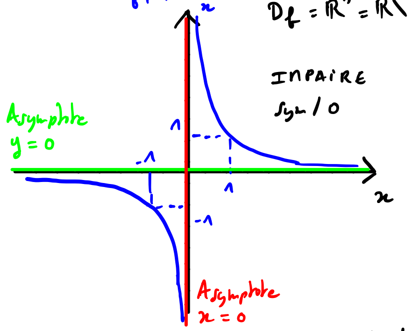
BP = branche parabolique

D_f = Ensemble de définition

$f(x) = \sqrt{x}$ $\quad D_f = [0, +\infty[= \mathbb{R}_+$



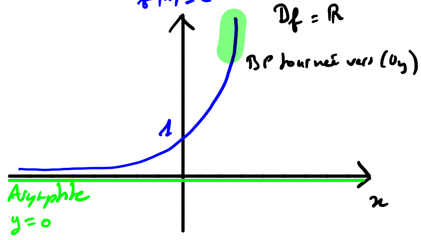
$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D_f = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$ asymptote horizontale en $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \to x = 0$ asymptote verticale en 0

$f(x) = e^x$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

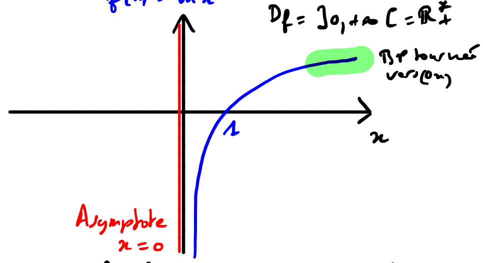


$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0 \Rightarrow y = 0$ asymptote horizontale en $-\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$ car $e^x >> x$ croissance comparée

d'où une BP tournée vers (Oy) en $+\infty$

$f(x) = \ln x$ $\quad D_f =]0, +\infty[= \mathbb{R}_+^*$



$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \Rightarrow x = 0$ asymptote vert.

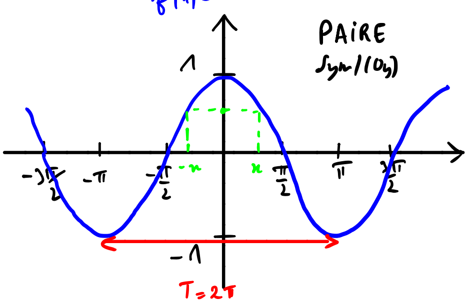
$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$ car $\ln x << x$

d'où une BP tournée vers (Ox) en $+\infty$

$f(x) = \cos x$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

PAIRE

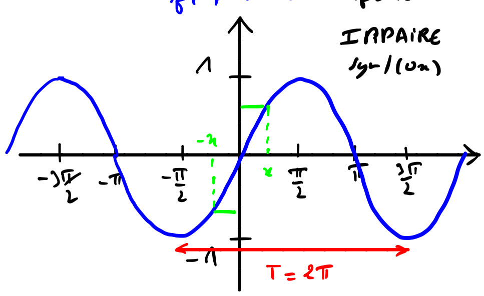
Sym / (Oy)

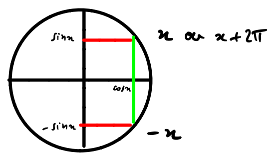


$f(x) = \sin x$ $\quad D_f = \mathbb{R}$

IMPAIRE

Sym / (Ox)





$\forall x \in \mathbb{R}$ $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \Rightarrow \cos \text{ paire} \\ \sin(-x) = -\sin x \Rightarrow \sin \text{ impaire} \end{cases}$

$\begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos x \Rightarrow \cos\ 2\pi\text{-périodique} \\ \sin(x + 2\pi) = \sin x \Rightarrow \sin\ 2\pi\text{-périodique} \end{cases}$

II DECALAGES ET AMPLIFICATION

Propriété Soit a un réel positif

La courbe représentative de $x \mapsto f(x)+a$ est celle de $x \mapsto f(x)$ décalée de a vers le haut

$x \mapsto f(x)-a$ — " — " — le bas

$x \mapsto f(x-a)$ — " — " — la droite

$x \mapsto f(x+a)$ — " — " — la gauche

Plus généralement, la courbe de $x \mapsto f(x-a)+b$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ est celle de $x \mapsto f(x)$ centrée sur le point $\Omega(a,b)$

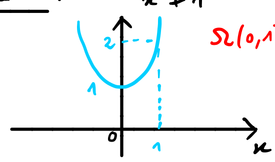
preuve : L'équation de la courbe est $y = f(x-a)+b \iff y-b = f(x-a)$

Si on pose $\begin{cases} x' = x-a \\ y' = y-b \end{cases}$ cela correspond à un changement d'origine du repère

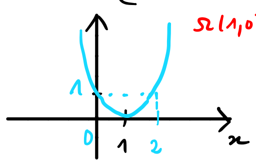
on obtient l'équation $y' = f(x')$ dans le repère de centre $\Omega(a,b)$

Exemple 1 :

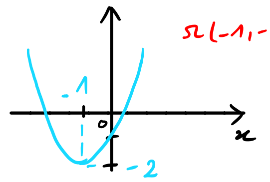
x^2+1 $\Omega(0,1)$



$(x-1)^2$ $\Omega(1,0)$



$x^2+2x-1 = (x+1)^2-2$ (forme canonique) $\Omega(-1,-2)$

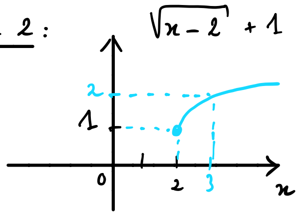


Rappel : $x^2 - 2dx = (x-d)^2 - d^2$ car $(x-d)^2 = x^2 - 2dx + d^2$ valable pour $x \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$

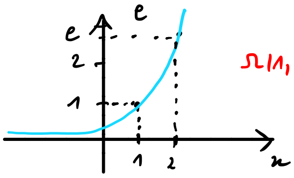
(Utile pour mettre sous forme canonique)

Exemple 2 :

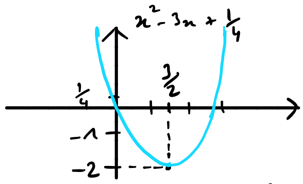
$\sqrt{x-2}+1$ $\Omega(2,1)$



e^{x-1} $\Omega(1,0)$



$x^2-3x+\frac{1}{4}$ $\Omega(\frac{3}{2},-2)$

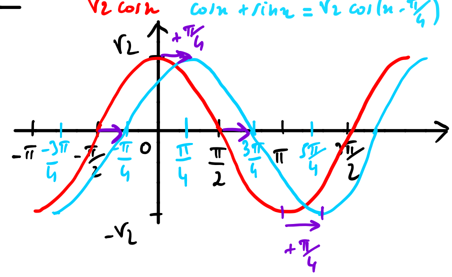


$$x^2 - 3x + \frac{1}{4} = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$$
$$= \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - 2$$

Définition on dit que $x \mapsto af(x)$ (avec $a>0$) est la fonction $x \mapsto f(x)$ amplifiée de a.

Exemple 3 :

$\sqrt{2}\cos x$ $\quad \cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$



$f(x) = \cos x + \sin x$

Rappel : $A\cos x + B\sin x = C\cos(x-\varphi)$ avec $\begin{cases} C = \sqrt{A^2+B^2} \\ \cos\varphi = \frac{A}{C} \\ \sin\varphi = \frac{B}{C} \end{cases}$

Ici, $A=1$, $B=1$ donc $C=\sqrt{2}$

$$f(x) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x + \sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)$$
$$= \sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

III Etude de fonction

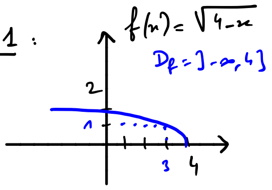
1) Domaine de définition

Rappel : $x \longmapsto \sqrt{x}$ est définie si $x \geqslant 0$

$x \longmapsto \frac{1}{x}$ est définie si $x \neq 0$

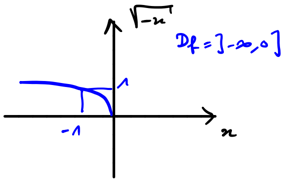
$x \longmapsto \ln x$ est définie si $x > 0$

ex 1 :



f est définie si $4 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 4$ $\qquad D_f =]-\infty, 4]$

$f(x) = \sqrt{-(x-4)}$ $\quad \mathcal{C}_f$ est la courbe de $x \longmapsto \sqrt{-x}$ décalée de 4 vers la droite

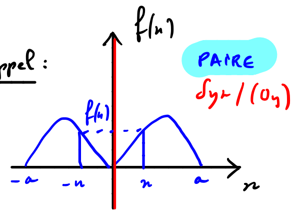


ex 2 : $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ est définie si $\cos x \neq 0 \iff x \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}\,[\pi]\}$

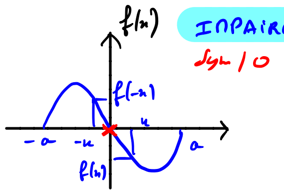
2) Domaine d'étude :

$a \in \mathbb{R}+$

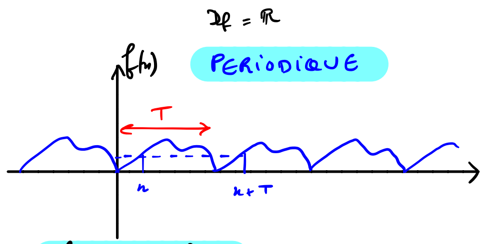
Rappel :



$f(-x) = f(x)$



$f(-x) = -f(x)$



$f(x+T) = f(x)$

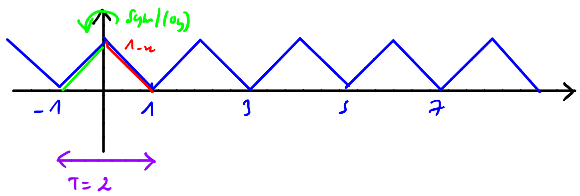
Propriété : Il suffit d'étudier une fonction paire (ou impaire) sur $\mathbb{R}+$. On déduira le reste de la courbe par symétrie.

Il suffit d'étudier une fonction T-périodique sur une période, comme $[0, T]$ ou $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$

Il suffit d'étudier une fonction T-périodique et paire (ou impaire) sur $[0, \frac{T}{2}]$

Ex 1 : Soit f la fonction paire, 2-périodique, définie sur $\mathbb{R}$, telle que $\forall x \in [0,1]$ $f(x) = 1 - x$

Tracer $\mathcal{C}_f$



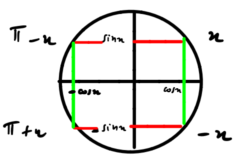
Ex 2 : Soit $f(x) = \tan x$, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}[\pi]\}$

$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x$ donc tan est π-périodique

$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$ donc tan est impaire

Il suffit donc d'étudier tan sur $D_E = [0, \frac{\pi}{2}[$

D_E est le domaine d'étude de la fonction.



3) Sens de variation

Rappel : Le sens de variation est donné par le signe de la dérivée

Ex 1 : $f(x) = \tan x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ comme quotient de fonctions usuelles dérivables sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ $(\cos x \neq 0)$

$$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$$

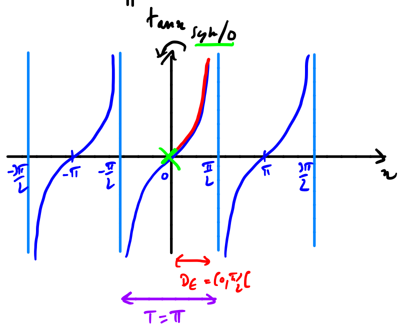
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(\cos x)' = -\sin x$
$(\sin x)' = \cos x$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

$\tan 0 = \frac{\sin 0}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$ donc $x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote verticale.



On trace la courbe sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et l'asymptote $x = \frac{\pi}{2}$

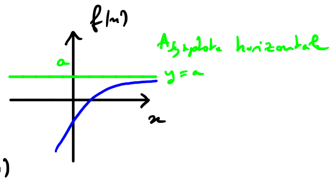
on déduit le tracé sur $]-\frac{\pi}{2}, 0]$ par symétrie / O (impaire)

Puis on déduit le reste de la courbe par périodicité

La fonction tan est une nouvelle fonction usuelle à connaître !

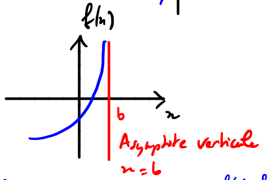
4) Limites, branches infinies et tracé de courbe

Soit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$



Rappel : si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$ alors $y = a$ est asymptote horizontale en $\pm\infty$

si $\lim\limits_{x \to b} f(x) = \pm\infty$ alors $x = b$ est asymptote verticale

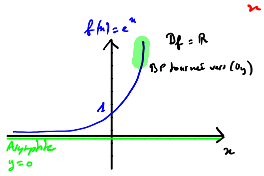


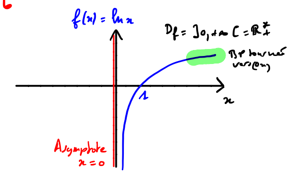
$\boxed{\text{Lorsque } \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty}$,

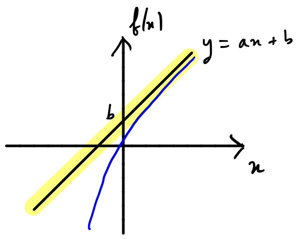
il faut étudier $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$

- $\to$ $\pm\infty$: BP tournée vers (Oy)
- $\to$ 0 : BP tournée vers (Ox)
- $\to$ a $(a \neq 0)$: Direction asymptotique $y = ax$, on continue en cherchant $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax$:

  si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b \in \mathbb{R}$ alors $y = ax + b$ est asymptote oblique







Ex 1 : Soit $f(x) = \frac{x^2 - x + 3}{x + 1}$. Etudier les branches infinies de f.

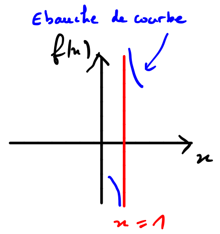
Point Méthode : Pour étudier les branches infinies d'une fonction f, il faut :

- Déterminer son domaine de définition D_f
- Etudier les limites de f aux bornes de D_f. En déduire les asymptotes horizontales et verticales éventuelles.
- Si $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, rechercher $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ et appliquer l'algorithme ci-dessus pour déterminer une BP ou une asymptote oblique.

Solution : $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x - 1}$ est définie si $x - 1 \neq 0 \iff x \neq 1$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$D_f =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

On étudie f aux bornes de D_f : en $\pm\infty$ et en 1



En 1 : $\lim\limits_{x \to 1} x^2 - x + 3 = 3$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

De même, $\lim\limits_{x \to 1^-} x - 1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

on a donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$

En $+\infty$: $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - x + 3 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty \end{array}\right\}$ on a une forme indéterminée

Propriété : Pour déterminer la limite d'une fraction rationnelle (quotient de polynômes) en $\pm\infty$, il suffit de garder les termes de plus haut degré.

Ici, $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x - 1}$ et $\dfrac{x^2}{x} = x \to +\infty$ si $x \to +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Définition : On note $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ et on dit que f est équivalent à g en $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

Dans notre exemple, on peut noter $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x - 1} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x} = x$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, on doit déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

$\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 - x} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ on note $a = 1$

on cherche ensuite $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax$

$f(x) - ax = f(x) - x = \dfrac{x^2 - x + 3}{x - 1} - x = \dfrac{x^2 - x + 3 - x(x-1)}{x - 1} = \dfrac{x^2 - x + 3 - x^2 + x}{x - 1} = \dfrac{3}{x - 1} \to 0$ si $x \to +\infty$

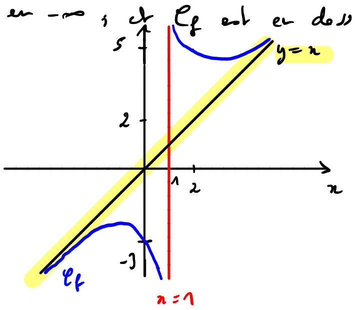
donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$ donc $b = 0$ donc $y = ax + b \iff y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$

Remarque : $f(x) - x = \dfrac{3}{x - 1} \to 0^+$ si $x \to +\infty$ donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de l'asymptote $y = x$ en $+\infty$

En $-\infty$: Par un raisonnement analogue, on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - x = 0^-$

donc $y = x$ est également asymptote oblique en $-\infty$, et $\mathcal{C}_f$ est en dessous de l'asymptote.

On obtient l'allure de courbe suivante :



$f(0) = -3$

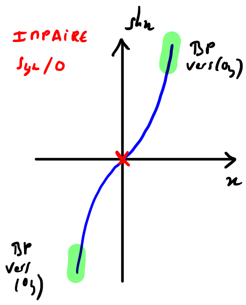
$f(2) = 5$

$\begin{cases} x^2 - x + 3 = 0 \\ \text{Aucune solution} \end{cases}$ $\Delta = 1 - 12 = -11 < 0$

IV Nouvelles fonctions usuelles

1) sinus hyperbolique

On note $\boxed{sh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$



$sh(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -sh x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc sh est impaire $\Rightarrow D_E = \mathbb{R}+$

$(sh x)' = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \geqslant 0$ $\qquad (e^u)' = u' e^u \Rightarrow (e^{-x})' = -e^{-x}$

x	0	$+\infty$
$(sh x)'$	$+$	
$sh x$	0 $\nearrow$	$+\infty$

$sh 0 = 0$

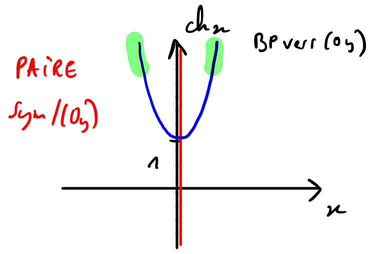
$\lim\limits_{x \to +\infty} sh x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{sh x}{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$(e^x >> x)$

donc on a une BP tournée vers (Oy) en $+\infty$

2) cosinus hyperbolique

On note $\boxed{ch x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$



$ch(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{x}}{2} = ch x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc ch est paire $\Rightarrow D_E = \mathbb{R}+$

$(ch x)' = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = sh x \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}+$ (cf ci-dessus)

x	0	$+\infty$
$(ch x)'$	$+$	
$ch x$	1 $\nearrow$	$+\infty$

$ch 0 = \dfrac{1+1}{2} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} ch x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ch x}{x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$(e^x >> x)$

donc on a une BP tournée vers (Oy) en $+\infty$

3) tangente hyperbolique

On note $\boxed{th x = \dfrac{sh x}{ch x}}$ définie sur $\mathbb{R}$ car $ch x \geqslant 1$ (chx ne s'annule jamais)

Propriétés : ① $th x = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

② $ch^2 x - sh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Preuve : ① $th x = \dfrac{sh x}{ch x} = \dfrac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \times \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

② $ch^2 x - sh^2 x = \left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} + 2 + \cancel{e^{-2x}}\right) - \dfrac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}} - 2 + \cancel{e^{-2x}}\right) = \dfrac{2}{4} + \dfrac{2}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

En effet $(e^x)^2 = e^{2x}$ et $e^x \times e^{-x} = e^0 = 1$

Etude de $th\,x$: $D_f = \mathbb{R}$

$th(-x) = \dfrac{sh(-x)}{ch(-x)} = \dfrac{-sh\,x}{ch\,x} = -th\,x$ impaire $\Rightarrow D_E = \mathbb{R}^+$

$\begin{cases} sh(-x) = -sh\,x & \text{IMPAIRE} \\ ch(-x) = ch\,x & \text{PAIRE} \end{cases}$

th est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, avec $ch\,x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(th\,x)' = \left(\dfrac{sh\,x}{ch\,x}\right)'$ $\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $\quad \begin{cases} (sh\,x)' = ch\,x \\ (ch\,x)' = sh\,x \end{cases}$ comme cos et sin sans PB de signe !

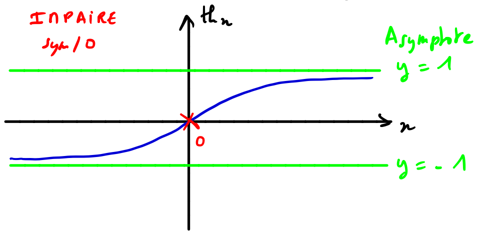
$(th\,x)' = \dfrac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \dfrac{1}{ch^2x} > 0$ $\quad$ On peut aussi écrire $(th\,x)' = \dfrac{ch^2x}{ch^2x} - \dfrac{sh^2x}{ch^2x} = 1 - th^2x$

x	0		$+\infty$
$(th\,x)'$		$+$	
$th\,x$	0	$\nearrow$	1

$th\,0 = \dfrac{sh\,0}{ch\,0} = \dfrac{0}{1} = 0$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} th\,x =$ forme indéterminée car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} sh\,x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} ch\,x = +\infty \end{cases}$

La forme $th\,x = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ permet de lever l'indétermination

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} th\,x = 1$ donc $y=1$ est asymptote horizontale en $+\infty$



On trace $\mathcal{C}_f$ sur $[0,+\infty[$ puis on déduit le reste par symétrie /O.