SERIES ENTIERES

VERSION 1

S3

SERIES ENTIÈRES

Une série entière s'écrit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$ Généralisation d'un polynôme

Par exemple, $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$ si $|x|<1$

$\times x \quad \times x$

série géométrique de raison x

$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 \times \frac{1}{1-q}$ si $|q|<1$

I Rayon de Convergence

On cherche à déterminer pour quelles valeurs de x la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ CV $\quad x \in \mathbb{R}$

Quel critère utiliser ?

$u_n = a_n x^n$ change de signe !

$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ critère de d'Alembert

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| \to \ell \quad \text{avec } \ell = L|x|$$

Simplifier, déterminer ℓ et à quelle condition sur x la série CV

On va noter $L = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Il faut que $\ell < 1 \iff L|x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{L}$

- La série converge si $|x| < \frac{1}{L}$

On note $R = \frac{1}{L}$ le rayon de CV de la série entière

- La série diverge si $|x| > \frac{1}{L}$

Bilan : Soit $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ et $R = \frac{1}{L}$

Si $|x| < R$ alors la série $\sum a_n x^n$ CV

Si $|x| > R$ alors la série $\sum a_n x^n$ DV

Si $|x| = R$ alors on ne sait pas

À retenir

On dit que R est le rayon de convergence de la série entière

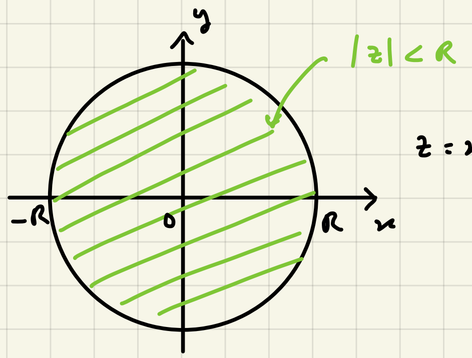
$x \in \mathbb{R}$ $\quad -R < x < R$

$\sum a_n x^n$ CV si $|x| < R$

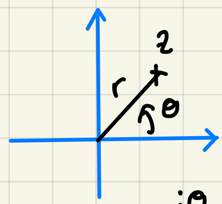
$z \in \mathbb{C}$

module de z

$\sum a_n z^n$ CV si $|z| < R$



$z = x + jy$



$z = re^{j\theta}$

$|z| = r$

<u>Ex1 :</u> Déterminer le rayon de CV de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ $\quad \frac{1}{n} x^n$ $\quad = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ et $R = \frac{1}{L}$

$a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \to 1$ si $n \to +\infty$

$L = 1 \qquad R = \frac{1}{L} = 1$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ CV si $|x| < 1$

Si $x = 1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ DV Riemann $\alpha = 1$ $\qquad$ (Rappel : $\sum \frac{1}{n^2}$ CV car $\alpha = 2$, $\alpha > 1$)

Si $x = -1$ $\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ CV Critère des séries alternées $u_n = (-1)^n v_n$

avec $v_n = \frac{1}{n} > 0$ $\quad v_n \searrow$ $\quad v_n \to 0$

Ex2 : Déterminer R pour $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad a_n = \frac{1}{n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{(n+1)!} \times n! = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \to +\infty$$

$$L = 0^+ \qquad R = \frac{1}{L} = +\infty$$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ CV pour tout x réel

__Remarque__ : on peut aussi déterminer R à l'aide du critère de Cauchy

$$L = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{et} \quad R = \frac{1}{L}$$

II Propriété des séries entières :

1) Dérivabilité

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définie et convergente sur $]-R, R[$ $\quad$ R = rayon de CV

__Propriété__ : f est dérivable sur $]-R,R[$ et on peut dériver f terme à terme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots = \sum_{\substack{n=0 \\ \text{ou } n=1}}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

__Ex1__ : Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad R = +\infty$

Déterminer $f'(x)$ $\qquad 0! = 1$

$$f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$$f'(x) = 0 + 1 + \frac{2x}{2} + \frac{3x^2}{6} + \dots + \frac{n x^{n-1}}{n!} + \dots$$

$$\frac{n}{n!} = \frac{\cancel{n}}{1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times \cancel{n}} = \frac{1}{(n-1)!}$$

$$f'(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n'=0}^{+\infty} \frac{x^{n'}}{n'!} = f(x)$$

$n' = n-1$

n	1	$+\infty$
n'	0	$+\infty$

$$\begin{cases} f'(x) = f(x) \\ f(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = e^x$$

2) Intégration

Propriété : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est continue sur $]-R, R[$ et une primitive de f s'obtient en intégrant terme à terme

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$\int f(x)\,dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Ex 1 : On rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\forall x \in]-1;1[$ — série géométrique de raison x, $|x|<1$

1) Déterminer un développement en série entière ("DSE") de $\frac{1}{1+x}$

2) En déduire un DSE de $\ln(1+x)$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad |x|<1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \quad \text{si } |-x|<1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \quad \text{si } |x|<1$$

DSE de $\frac{1}{1+x}$: $a_n = (-1)^n$

on intègre

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{si } |x|<1$$

le R reste inchangé quand on intègre ou qu'on dérive !

changement d'indice : $n' = n+1$

n	0	$+\infty$
n'	1	$+\infty$

$$\ln(1+x) = \sum_{n'=1}^{+\infty} (-1)^{n'-1} \frac{x^{n'}}{n'}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \qquad a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

III Catalogue des développements en série entière des fonctions usuelles

Deux exemples fondamentaux : $\leftarrow$ ${}^{\text{eo}}\ \frac{1}{1-q}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \forall |x| < 1 \qquad R = 1 \qquad -1 < x < 1 \qquad \text{série géométrique}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \qquad R = +\infty$$

On en déduit les DSE de nouvelles fonctions par
- Dérivation
- Intégration
- Changement de variable de type $X = \lambda x^p$

Exo DSE de $f(x) = 3e^{2x}$

Préciser le domaine de CV.

$X = 2x$

$$e^X = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} \quad \forall X \in \mathbb{R} \Rightarrow e^{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow 3e^{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 3 \times 2^n \frac{x^n}{n!} \qquad a_n = \frac{3 \times 2^n}{n!}$$

Ex1 Déterminer le DSE de arctan x

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{or} \quad \frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n \quad \forall |X| < 1$$

$$a_{2n} = (-1)^n$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad X = -x^2$$

$$|-x^2| < 1 \iff |x| < 1$$

on intègre

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \qquad \forall |x| < 1$$

$$R = +\infty \qquad\qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad\qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad \text{si } |x| < 1$$

Ex2 : DSE de $e^{3x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3x)^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad X = 3x$

$a_n = ?$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} x^n \qquad a_n = \frac{3^n}{n!} \qquad R = +\infty$$

$x \in ?$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n \qquad X = 2x$$

$$|2x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{2} \qquad R = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n \qquad a_n = 2^n$$

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \, \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \qquad X = \frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2 \qquad R = 2$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} x^n \qquad a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{x}{(x-1)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3} \qquad A = \left[\frac{x}{x-3}\right]_1 = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-3} \qquad B = \left[\frac{x}{x-1}\right]_3 = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-x} - \frac{\frac{3}{2}}{3-x}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1-x} - \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \, \frac{1}{1-\frac{x}{3}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n}_{|x|<1} - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n}_{\left|\frac{x}{3}\right| < 1 \iff |x| < 3} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(x^n - \frac{x^n}{3^n}\right)$$

$$|x| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) x^n$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$$

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ si $|x|<1$ $\quad R=1$

Ex3 : DSE de $\frac{1}{(1+x)^2}$

$$\int \frac{1}{(1+x)^2}\,dx = \int (1+x)^{-2}\,dx = -\frac{1}{1+x}$$

$u = 1+x$

$u' = 1$

$$\boxed{\int \frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u}}$$

$$\int u' u^{-2} = \frac{u^{-1}}{-1} = -\frac{1}{u}$$

$$\int u' u^n = \frac{u^{n+1}}{n+1}$$

on intègre

$$\frac{-1}{1+x} = \frac{-1}{1-(-x)} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \quad \text{si } |-x|<1 \iff |x|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} -(-1)^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} x^n$$

$a_n = (-1)^{n+1}$

on dérive

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1}\, n\, x^{n-1} \qquad |x|<1$$

rayon de CV conservé par dérivation / intégration

$\ln(1+x^2)$

on dérive

$|-x^2|<1 \iff |x|<1$

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 2(-1)^n \\ a_{2n} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{1-(-x^2)}$$

$$\frac{2x}{1+x^2} = 2x \times \frac{1}{1+x^2} = 2x \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 2x \times (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n x^{2n+1}$$

on intègre

$$\ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \qquad |x|<1$$

$$e^{2x} - x e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$R = +\infty$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$n' = n+1 \iff n = n'-1$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

n	0	$+\infty$
n'	1	$+\infty$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n - \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{x^{n'}}{(n'-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right) x^n + \underset{n=0}{\underset{\uparrow}{1}}$$

$n! = (n-1)! \times n$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n - n}{n!}\right) x^n + 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2^n - n}{n!}\right) x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$a_n = \frac{2^n - n}{n!}$$

On peut aussi vous demander de faire le processus inverse: on vous donne une série entière, et il faut calculer la fonction à laquelle elle correspond.

On a déjà vu :

$u_0 \frac{1}{1-q}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad |x|<1$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex 1 : Calculer la somme des séries entières suivantes : (préciser le domaine de cv)

① $$\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^n = 2x \times \frac{1}{1-2x} \qquad |2x|<1 \Leftrightarrow |x|<\frac{1}{2}$$

② $$\sum_{n=0}^{+\infty} 3^{n-1} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{3} \frac{(-x)^n}{n!} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3x)^n}{n!} = \frac{1}{3} e^{-3x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ex 2 : Calculer la somme des séries entières suivantes :

① $$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x \times x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = x \times \frac{1}{1-x} = \frac{x}{1-x} \quad \text{si } |x|<1$$

2e méthode : $n' = n+1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \sum_{n'=1}^{+\infty} x^{n'} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n - 1 = \frac{1}{1-x} - 1 \quad \text{si } |x|<1$$

$\uparrow$ $n=0$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{1-x} = \frac{x}{1-x}$$

② $$\sum_{n=1}^{+\infty} (n-2)\, x^{n-1} = \sum_{n'=0}^{+\infty} (n'-1)\, x^{n'}$$

changement d'indice : $n' = n-1 \Leftrightarrow n = n'+1$ $\qquad n-2 = n'+1-2 = n'-1$

(on intègre : $\sum_{n=0}^{+\infty} (n-1) \frac{x^{n+1}}{n+1}$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1-2)\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \frac{1}{1-x} - 1$$

on dérive

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{1-x} - 1$$

10 minutes

$v = 1-x \qquad v' = -1$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \qquad \left(\frac{1}{1-x}\right)' = -\frac{-1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n - 2\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2}{1-x} \qquad \forall |x| < 1$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2(1-x)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1-2(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1-2+2x}{(1-x)^2} = \frac{-1+2x}{(1-x)^2}$$

2e méthode : (+ simple)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n-2)x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$$

$$\sum_{n=1 \text{ ou } n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad |x| < 1$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{n'=0}^{+\infty} x^{n'} = \frac{1}{1-x} \qquad |x| < 1$$

$n' = n-1$

n	1	$+\infty$
n'	0	$+\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n-2)x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2}{1-x}$$

Détermination des coefficients a_n

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ $\quad$ R = rayon de

Si $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n + \dots$ pour tout $x \in]-R, R[$

10 minutes

$\Rightarrow f(0) = a_0$

$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots \quad \Rightarrow f'(0) = a_1$

$f''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + \dots + n(n-1) a_n x^{n-2} + \dots \quad \Rightarrow f''(0) = 2a_2$

$f^{(3)}(x) = 6a_3 + \dots + n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3} + \dots \quad \Rightarrow f^{(3)}(0) = 6a_3$

Généraliser : $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$

On en déduit $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$

DSE $\qquad$ somme ∞

$$\Rightarrow f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots \quad \forall x \in]-R, R[$$

On retrouve les coefficients des DL en 0

↳ Taylor-Young $\qquad$ ordre 2 $\qquad$ somme finie

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \underbrace{x^2\varepsilon(x)}_{\text{reste}}$$

si x est proche de 0 $\qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$

ex1 : DSE de $\cos x$?

DL en 0 à l'ordre 5 de $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon(x)$$

puissances paires
signes alternés

si x proche de 0

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon(x)$$

puissances impaires
signes alternés

DSE de $\cos x$:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

basé sur des exp $\qquad$ DSE valable $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

TD

Exercice 2

Exprimer les séries entières suivantes grâce aux fonctions usuelles, puis préciser pour quelles valeurs de x (ou z) l'égalité est valable.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ c) $\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$ d) $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{z^n}$ où z est complexe.

↳ Dériver

En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^n}$

Exercice 3

Développer en série entière les fonctions suivantes et préciser le domaine de convergence de la série obtenue :

a) $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ b) $g(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ c) $h(x) = (x^2 + x + 2)e^x$ d) $i(x) = 1/(2-x)$

$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

puis dériver

Exercice 4

Ex2 a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = u_0 \frac{1}{1-q}$ géométrique $q = \frac{x}{2}$

$= 1 \frac{1}{1-x/2}$

$= \frac{2}{2-x}$ $\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$

b) $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$ $n' = n-1$

$= \sum_{n'=0}^{+\infty} x^{n'} = \frac{1}{1-x}$ $|x| < 1$

2e méthode : $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{x} \times x \times \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$ $|x|<1$

3e méthode : $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + x^n + \dots = \frac{1}{1-x}$ $|x|<1$

$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \int \frac{1}{1-x}\,dx = -\ln|1-x| + C$ $\int \frac{u'}{u} = \ln|u| + c$

$f(0) = 0 = -\ln 1 + C = C \Rightarrow C = 0$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x|$ $|x|<1$

Ex3 : DSE de :

a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$ b) $g(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

a) $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n$ $|x^2|<1 \iff |x|<1$ $X=x^2$

$\dfrac{1}{1-X}=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}X^n$ $|X|<1$

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}$$

b) $g(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$

$\Rightarrow g'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}$ $(\ln(1-x))'=\dfrac{-1}{1-x}$

$$g'(x)=\frac{1}{1-(-x)}+\frac{1}{1-x}$$

$g'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-x)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}x^n$ si $|x|<1$

$\displaystyle\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$g'(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+1)\,x^n$ $|x|<1$

on intègre

$g(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}((-1)^n+1)\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ $g(0)=0=C$

$(-1)^n+1=0$ si n impair

Si $n=2p$ $\dfrac{(-1)^n+1}{n+1}=\dfrac{(-1)^{2p}+1}{2p+1}=\dfrac{2}{2p+1}$

Si $n=2p+1$ $\dfrac{(-1)^n+1}{n+1}=\dfrac{(-1)^{2p+1}+1}{2p+2}=\dfrac{0}{2p+2}=0$

$g(x)=\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{2p+1}x^{2p+1}$ $|x|<1$

2e méthode : $g'(x)=\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}=\dfrac{2}{1-x^2}=2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}$ $|x|<1$

$$\Rightarrow g(x)=2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

IV Application. Résolution d'équations différentielles

méthode classique

<u>Ex1</u> : $\begin{cases} y' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\iff y' = 2y \iff \frac{y'}{y} = 2$

$(e^{2x})' = 2e^{2x}$ $\iff \ln|y| = 2x + C$

$\iff y = ke^{2x}$

$y(0) = k = 1$

$\Rightarrow y = e^{2x}$

On cherche y sous la forme $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$$\Rightarrow y' = \sum_{\substack{n=0 \\ \text{ou } n=1}}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$y' - 2y = 0$

$\iff \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$n' = n - 1 \iff n = n' + 1$

$\iff \sum_{n'=0}^{+\infty} (n'+1) a_{n'+1} x^{n'} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$

$(2a - b)x^2 + (a+b)x + c = 0$

$\begin{cases} 2a - b = 0 \\ a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

$\iff \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1) a_{n+1} - 2a_n\right) x^n = 0$

Une série entière est nulle si et si <u>tous les coefficients sont nuls</u>

$\iff (n+1) a_{n+1} - 2a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

$\iff \begin{cases} a_{n+1} = \frac{2}{n+1} a_n \\ a_0 = 1 \end{cases}$ $y(0) = 1 \Rightarrow a_0 = 1$

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow a_0 = \frac{y(0)}{0!} = y(0)$ $a_2 = \frac{y''(0)}{2}$

$a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = y'(0)$

$a_0 = 1$

$\Rightarrow a_1 = \frac{2}{1} a_0 = 2$

$\Rightarrow a_2 = \frac{2}{2} a_1 = \frac{2}{2} \frac{2}{1} a_0 = \frac{2^2}{2!} a_0$

$\Rightarrow a_3 = \frac{2}{3} a_2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{2} \times \frac{2}{1} a_0 = \frac{2^3}{3!} a_0$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} = e^X \quad X \in \mathbb{R}$

$\vdots$

$\Rightarrow a_n = \frac{2^n}{n!} a_0 = \frac{2^n}{n!}$ $\Rightarrow y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$

$\forall x \in \mathbb{R}$

Ex2 : $\begin{cases} xy'' + 2y' + xy = 0 \\ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0 \end{cases}$

<u>Remarque</u> : ce n'est pas la forme $ay'' + by' + cy = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ (constantes)

donc la méthode classique bloque

On cherche y sous la forme $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

10 minutes

$$\Rightarrow y' = \sum_{n=0 \text{ ou } 1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{n=0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$xy'' + 2y' + xy = 0 \Rightarrow x \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

$\rightarrow$ changement d'indice pour avoir la même puissance de x dans les trois Σ $\quad n'-1 = n+1 \Rightarrow n' = n+2 \Rightarrow n = n'-2$

n	0	$+\infty$
n'	2	$+\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2n a_n x^{n-1} + \sum_{n'=2}^{+\infty} a_{n'-2} x^{n'-1} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \left(n(n-1) a_n + 2n a_n + a_{n-2} \right) x^{n-1}}_{\dots x + \dots x^2 + \dots x^3 + \dots + \dots x^n + \dots} + \underset{\substack{\uparrow \\ n=1 \\ \text{de la 2}^{\text{e}} \text{ somme}}}{2a_1} = 0$$

Une série entière est nulle $\Leftrightarrow$ tous les coefficients sont nuls

$$\begin{cases} n(n-1) a_n + 2n a_n + a_{n-2} = 0 & \forall n \geq 2 \\ 2a_1 = 0 \end{cases}$$

10 minutes

$$n(n-1) a_n + 2n a_n + a_{n-2} = 0 \Leftrightarrow \left(n(n-1) + 2n \right) a_n = -a_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow (n^2 - n + 2n) a_n = -a_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow (n^2 + n) a_n = -a_{n-2}$$

$$\Leftrightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}$$

$y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = y(0) = 1 \\ a_1 = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \Rightarrow a_0 = \frac{y(0)}{0!} = y(0)$ $\quad a_2 = \frac{y''(0)}{2}$

$a_1 = \frac{y'(0)}{1!} = y'(0)$

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n+1)}$$

$$\begin{cases} a_0 = y(0) = 1 \\ a_1 = y'(0) = 0 \end{cases}$$

$a_0 = 1$

$\Rightarrow a_2 = -\frac{a_0}{2 \times 3} = \frac{(-1)^1 a_0}{3!}$

$\Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4 \times 5} = -\frac{1}{4 \times 5} \times -\frac{a_0}{2 \times 3} = \frac{(-1)^2 a_0}{2 \times 3 \times 4 \times 5} = \frac{(-1)^2 a_0}{5!}$

$a_1 = 0$

$\Rightarrow a_3 = -\frac{a_1}{3 \times 4} = 0$

$\Rightarrow a_5 = -\frac{a_3}{5 \times 6} = 0$

$\Rightarrow a_{2p+1} = 0$

$\Rightarrow a_{2p} = \frac{(-1)^p a_0}{(2p+1)!}$ $\quad a_0 = 1$

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} a_{2p} x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p}$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p} + \dots$$

$\times x$

DL en 0 à l'ordre 5

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon(x) & \text{puissances paires, signes alternés} \\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon(x) & \text{puissances impaires, signes alternés} \end{cases}$$

$\boxed{y = \frac{\sin x}{x}}$ est la solution de l'équation différentielle.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle suivante : $y''+2xy'+2y=0$ (E) avec les conditions initiales $y(0)=1$ et $y'(0)=0$. En reprenant la méthode exposée dans l'exercice 5, résoudre (E). Peut-on résoudre (E) en utilisant une autre méthode ?

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$y(0)=1$ et $y'(0)=0$ $\Rightarrow \begin{cases} a_0 = y(0) = 1 \\ a_1 = y'(0) = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

ou $n=1$

$$\Rightarrow y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

ou $n=1$ ou 2

$y''+2xy'+2y=0$ (E)

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 2x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n = 0$$

changement d'indice pour avoir la même puissance de x

$n' = n-2$

$$\Leftrightarrow \sum_{\dots}^{\dots} \dots\dots x^{n'} + \sum_{n=1}^{+\infty} 2 n a_n x^{n} + \sum_{n=0}^{+\infty} 2 a_n x^n = 0$$

A terminer

$$\Rightarrow \sum \dots\dots x^n + \dots = 0$$

Une série entière est nulle $\Leftrightarrow$ tous les coefficients sont nuls

on en déduit une relation portant sur a_n

$\Rightarrow a_n = ?$ $\Rightarrow y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = ?$

SERIES ENTIERES

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour tout $|x| < R$ où R est le rayon de convergence.

Calcul du rayon de convergence :

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{avec} \quad L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{(critère de d'Alembert)}$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{(critère de Cauchy)}$$

Deux exemples fondamentaux :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall |x| < 1, \qquad \text{Série géométrique de raison } x$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{Fonction exponentielle}$$

La fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur]-R ;R[.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad \int f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \forall |x| < R$$

Conséquence : $\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$

on retrouve les coefficients des DLs en 0.

Conservation du domaine de convergence par dérivation et intégration

Claire Schmidt
IUT de Cachan
GEII1 - S3

3 méthodes pour déduire d'autres développements en série entière

méthode 1 : par changement de variable du type $\boxed{X = \lambda x^p}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$

exemple : on sait que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ si $|x|<1$ donc $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$

on pose $X = -x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ si $|-x^2|<1$ cad $|x|<1$

méthode 2 : par dérivation / intégration de série entière

exemple : on sait que $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

or on a vu ci-dessus que $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ si $|x|<1$

donc, par intégration, $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$ si $|x|<1$

Comme $\arctan 0 = 0$, on trouve $C=0$ donc $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

exemple 2 : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\forall |x|<1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x|<1$

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + C$ $\forall |x|<1$, $\ln 1 = 0$ donne $C=0$

méthode 3 : par combinaison de séries entières (linéaire ou avec un facteur x^p)

exemple 1

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}_{\text{si } |x|<1} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n}_{\text{si } \left|\frac{x}{2}\right|<1 \text{ soit } |x|<2} \qquad \text{si } |x|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n \qquad \text{si } |x|<1$$

exemple 2

$$e^{2x} - x e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty}}_{n'=n+1} \frac{x^{n+1}}{n!} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

changement d'indice

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n - \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{x^{n'}}{(n'-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right) x^n + \underbrace{1}_{n=0}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - n}{n!} x^n \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$