S1

10/2018

CORRIGÉ DU DM 1 DE MATHÉMATIQUES

Exercice 1

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - n \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

$P(n) : u_n = 2^n + n + 1$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2^n + n + 1$

(1) Vérifions que la proposition est vraie si $n = 0$

$u_0 = 2$ et $2^0 + 0 + 1 = 2$ donc c'est vrai $\Rightarrow P(0)$ est vrai

Hypothèse de récurrence

(2) on suppose que $\boxed{u_n = 2^n + n + 1}$ pour un n fixé, $n \geq 0$

on démontre que $\boxed{u_{n+1} = 2^{n+1} + n + 2}$ ← À démontrer

on sait que $u_{n+1} = 2u_n - n = 2(2^n + n + 1) - n$

D'après l'hypothèse de récurrence

donc $u_{n+1} = 2^{n+1} + 2n + 2 - n = 2^{n+1} + n + 2 \Rightarrow P(n+1)$ est vrai

(3) Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \boxed{u_n = 2^n + n + 1}$

Claire
Schmidt
GEii1

Exercice 2

forme $u_n = u_0 q^n$ avec $u_0 = 1$ et $q = 3$

premier indice — dernier indice

1) a) $A_n = \sum_{k=\boxed{1}}^{\boxed{n}} \boxed{3^k} = 3^{\boxed{1}} \xrightarrow{\times 3} + 3^2 + \dots + 3^{\boxed{n}}$

on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison 3.

1er terme — nombre de termes $= n - 1 + 1 = n$

on a donc : $A_n = \boxed{3} \times \dfrac{1 - 3^{\boxed{n}}}{1 - \boxed{3}}$ — raison

Soit $\boxed{A_n = -\dfrac{3}{2}\left(1 - 3^n\right)}$

ni arithmétique (forme $u_n = u_0 + rn$ comme $3n+5$ ou $-2+n$)

b) $B_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$

ni géométrique (forme $u_n = u_0 q^n$ comme 2×3^n ou $\left(-\frac{1}{2}\right)^n$)

$B_n = \sum_{k=2}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$ car $\sum_{k=2}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=2}^{n} a_k + \sum_{k=2}^{n} b_k$

1ère méthode : Ecrire sans Σ :

$B_n = \left(\cancel{\ln 3} + \cancel{\ln 4} + \dots + \cancel{\ln(n)} + \ln(n+1)\right) - \left(\ln 2 + \cancel{\ln 3} + \cancel{\dots} + \cancel{\ln n}\right)$

$B_n = \boxed{\ln(n+1) - \ln 2}$

2e méthode : changement d'indice sur le 1er Σ : on pose $k' = k+1$

$B_n = \sum_{k'=3}^{n+1} \ln(k') - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) = \boxed{\ln(n+1) - \ln 2}$

Claire Schmidt
GEii1

2) a)

u_n est une suite arithmétique de raison r' et v_n est une suite arithmétique de raison r donc $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r' \\ v_{n+1} = v_n + r \end{cases}$

$\Rightarrow w_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = u_n + r' + v_n + r$

$\Rightarrow w_{n+1} = w_n + r + r'$

w_n est donc une suite arithmétique de raison $r'' = r + r'$

b) $u_1 = 2$ et $u_5 = 14$

<u>1ère méthode :</u> $u_n = u_0 + r'n \Rightarrow \ominus \begin{cases} u_5 = u_0 + 5r' \\ u_1 = u_0 + r' \end{cases}$

$$u_5 - u_1 = 4r'$$

donc $r' = \dfrac{u_5 - u_1}{4} = \dfrac{14-2}{4} = \dfrac{12}{4} = 3$

on en déduit $u_0 = u_1 - r' = 2 - 3 = -1$

<u>2e méthode :</u> $u_n = u_1 + r'(n-1) \Rightarrow u_5 = u_1 + 4r'$

$14 = 2 + 4r'$

donc $4r' = 12$

$\Rightarrow r' = 3$

Formule
$u_n = u_p + (n-p)r$

c) $w_1 + w_2 + \dots + w_7 = 7 \times \dfrac{w_1 + w_7}{2} = 154 \Rightarrow w_1 + w_7 = \dfrac{308}{7} = 44$

1er terme — dernier terme — nombre de termes

$$\begin{array}{r|l} 308 & 7 \\ 28 & 44 \\ 0 & \end{array}$$

De plus, $w_7 = 37$ donc $w_1 = 44 - w_7 = 44 - 37 = 7$

$w_7 = w_1 + 6r'' \Rightarrow r'' = \dfrac{w_7 - w_1}{6} = \dfrac{30}{6} = 5$ or $r'' = r + r' = 3 + r$

donc $\boxed{r = 2}$

Exercice 3

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{k=2} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{k=3} + \underbrace{\frac{1}{12}}_{k=4} + \dots + \underbrace{\frac{1}{n(n-1)}}_{k=n}$$

1) $S_2 = \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k(k-1)} = \boxed{\frac{1}{2}}$

$S_3 = \sum_{k=2}^{3} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$

$S_4 = \sum_{k=2}^{4} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{8}{12} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \boxed{\frac{3}{4}}$

2) On met au même dénominateur :

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1 \times k - 1 \times (k-1)}{k(k-1)} = \boxed{\frac{1}{k(k-1)}}$$

3) On a donc $S_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)$

$\Rightarrow S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

$S_n = \left(1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}} \right) - \left(\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{n} \right)$

$S_n = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n}{n} - \frac{1}{n} = \boxed{\frac{n-1}{n}}$

On a bien $S_2 = \frac{2-1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$; $S_3 = \frac{3-1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$ et $S_4 = \frac{4-1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$

4/7

$P(n)$: $S_n = \frac{n-1}{n}$

4) Démontrons par récurrence que $S_n = \frac{n-1}{n}$

INITIALISATION

$P(2)$, $P(3)$ et $P(4)$ sont vrai

- on a déjà vérifié que c'est vrai pour $n=2$, $n=3$ et $n=4$

hypothèse de récurrence $P(n)$

HÉRÉDITÉ

- on suppose que $\boxed{S_n = \frac{n-1}{n}}$ pour un n fixé, $n \geqslant 2$

$P(n+1)$ à démontrer

on démontre que $S_{n+1} = \frac{n}{n+1}$

$$S_{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} = \underbrace{\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{n(n-1)}}}_{``S_n} + \frac{1}{(n+1)n}$$

on a donc $S_{n+1} = \boxed{S_n} + \frac{1}{(n+1)n}$

on utilise l'hypothèse de récurrence

d'où $S_{n+1} = \boxed{\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{(n+1)n}$

on met au même dénominateur :

$$S_{n+1} = \frac{(n-1)(n+1) + n+1}{n(n+1)} = \frac{n^2-1+n+1}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow S_{n+1} = \frac{n^2}{n(n+1)} = \boxed{\frac{n}{n+1}}$$

donc $P(n+1)$ est vrai

CONCLUSION

- <u>conclusion</u> : $\forall n \geqslant 2$ $\boxed{S_n = \frac{n-1}{n}}$

Claire
Schmidt
GEii1

Exercice 4

1) $\dfrac{11!}{9!} = \dfrac{\cancel{1\times 2\times \dots \times 9}\times 10\times 11}{\cancel{1\times 2\times \dots \times 9}} = 10\times 11 = \boxed{110}$

$\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{\cancel{1\times 2\times \dots \times (n-2)}\times (n-1)\times n}{\cancel{1\times 2\times \dots \times (n-2)}} = \boxed{(n-1)\times n}$

2) on fait le triangle de Pascal :

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
$n=5 \rightarrow$ $\boxed{1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1}$

les puissances de a diminuent
le puissance de b augmentent
} la somme = 5

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + b^5$

$\Rightarrow (x+4)^5 = x^5 + 5x^4\times 4 + \boxed{10x^3\times 4^2} + 10x^2\times 4^3 + 5x\times 4^4 + 4^5$

le coefficient de x^3 est donc $10\times 4^2 = \boxed{160}$

2ᵉ méthode :

$(x+4)^5 = \sum_{k=0}^{5} C_5^k\, x^{5-k}\times 4^k$

le coefficient de x^3 est obtenu quand $k=2$

$\Rightarrow$ il vaut donc $C_5^2\times 4^2 = \dfrac{5!}{2!\,3!}\times 16 = \dfrac{5\times 4}{2}\times 16 = 10\times 16 = \boxed{160}$

Claire
Schmidt
GEii1

$S = -b/a$

$x_1 + x_2 = -8$

$P = c/a$

$x_1 x_2 = -9 = (-1)\times 9 = 3 \times (-3)$
$= 1 \times (-9) = (-3) \times 3$

3)

ⓐ $x^2 + 8x - 9 = 0$

on peut soit faire un Δ, soit remarquer que

$$x^2 + 8x - 9 = (x+9)(x-1) \quad \text{(calcul immédiat)}$$

d'où $x_1 = -9$ et $x_2 = 1$ $\boxed{S = \{-9 ; 1\}}$

<u>Autre méthode</u>: 1 est solution évidente car $1^2 + 8\times 1 - 9 = 0$

donc $x^2 + 8x - 9 = (x-1)(x - x_2) \Rightarrow x_2 = -9$

$P = x_1 x_2 = -9$

$x_1 = 1$

ⓑ $e^{2x} - 6e^x + 9 = 0$

changement de variable

on pose $\boxed{X = e^x}$ alors on a $X^2 = e^{2x}$

d'où $X^2 - 6X + 9 = 0$

on s'est ramené à une équation du 2nd degré grâce à un changement de variables

$\Leftrightarrow (X-3)^2 = 0 \Leftrightarrow X = 3$

or $X = e^x = 3$ donc $x = \ln 3$ $\Rightarrow \boxed{S = \{\ln 3\}}$

Ne pas oublier de revenir à la variable de départ x

Claire Schmidt
GEii1