Claire Schmidt
IUT de Cachan - GEII 1

# Devoir de Préparation au DS N°3

## Séries de Fourier & Transformation en Z

## Eléments de Correction

### Exercice 1

① $\dfrac{1}{z-6} = z^{-1}\dfrac{z}{z-6} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} 6^{n-1}U(n-1)$ si $|z|>6$

d'après l'exemple usuel $b^n U(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \dfrac{z}{z-b}$ si $|z|>|b|$

et le théorème du retard :

$a_{n-m}U(n-m) \xrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-m}A(z)$

② $a_n = \dfrac{3^n}{n!}U(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{3^n}{n!}U(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(3z^{-1})^n}{n!} = e^{\frac{3}{z}} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

on a utilisé le développement en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{z^n}{n!} = e^z$ valable $\forall z \in \mathbb{C}$

③ $\dfrac{z}{z^2-4} = \dfrac{z}{(z-2)(z+2)}$

or $\dfrac{1}{(z-2)(z+2)} = \dfrac{A}{z-2} + \dfrac{B}{z+2}$ avec $A = \left[\dfrac{1}{z+2}\right]_2 = \dfrac{1}{4}$ et $B = \left[\dfrac{1}{z-2}\right]_{-2} = \dfrac{-1}{4}$

donc $\dfrac{z}{z^2-4} = z\left(\dfrac{1/4}{z-2} - \dfrac{1/4}{z+2}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{z}{z-2} - \dfrac{z}{z+2}\right) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \dfrac{1}{4}\left(2^n - (-2)^n\right)U(n)$

$|z|>2$

④ $nU(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} -z\left(\dfrac{z}{z-1}\right)' = -z\dfrac{z-1-z}{(z-1)^2} = \dfrac{z}{(z-1)^2} \quad \forall |z|>1$

d'après l'exemple usuel $U(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \dfrac{z}{z-1}$ si $|z|>1$

et la propriété : $n\,a_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} -zA'(z)$ (conservation du domaine de CV)

Claire Schmidt
IUT de Cachan - GEII 1

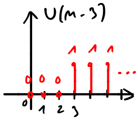
**(5)** $5^m U(m-3) = 5^3 \times 5^{m-3} U(m-3) \xrightarrow{Z} 5^3 \times z^{-3} \times \frac{z}{z-5}$ si $|z|>5$

$$= \frac{125}{z^2(z-5)}$$

2ème méthode : (calcul de série)

$$A(z) = \sum_{m=0}^{+\infty} 5^m U(m-3) z^{-m} = \sum_{m=3}^{+\infty} 5^m z^{-m} = \sum_{m=3}^{+\infty} (5z^{-1})^m = \underbrace{(5z^{-1})^3}_{\text{1er terme}} \times \frac{1}{1-\underbrace{5z^{-1}}_{\text{raison}}} \quad \text{si } |5z^{-1}|<1$$

$$\iff \left|\frac{5}{z}\right| < 1 \iff |z|>5$$




En effet : $U(m-3) = 0$ si $m<3$ et $U(m-3)=1$ si $m \geq 3$

De plus, $\sum_{m=p}^{+\infty} q^m = \underbrace{q^p}_{\text{1er terme}} \times \frac{1}{1-\underbrace{q}_{\text{raison}}}$ si $|q|<1$

En simplifiant, on obtient : $A(z) = 5^3 \times z^{-3} \times \frac{1}{1-5z^{-1}} = \frac{125}{z^3} \frac{1}{1-\frac{5}{z}} = \frac{125}{z^2(z-5)}$ si $|z|>5$

**(6)** méthode 1 : Utiliser $\boxed{b^m a_m \xrightarrow{Z} A\left(\frac{z}{b}\right)}$ et $a_m = \frac{1}{3} m U(m) \xrightarrow{Z} A(z) = \frac{1}{3} \frac{z}{(z-1)^2}$ $|z|>1$

$$3^{m-1} m U(m) = 3^m \times \frac{1}{3} m U(m) \xrightarrow{Z} A\left(\frac{z}{3}\right) = \frac{1}{3} \frac{z/3}{\left(\frac{z}{3}-1\right)^2} \quad \text{si } \left|\frac{z}{3}\right| > 1$$

$$= \frac{z}{(z-3)^2} \quad \text{si } |z|>3$$

méthode 2 : Utiliser $\boxed{m a_m \xrightarrow{Z} -z A'(z)}$ avec $a_m = 3^{m-1} U(m) = \frac{1}{3} \times 3^m U(m) \xrightarrow{Z} A(z) = \frac{1}{3} \frac{z}{z-3}$ si $|z|>3$

$3^{m-1} m U(m) = m \times 3^{m-1} U(m) \xrightarrow{Z} -z \left(\frac{1}{3} \frac{z}{z-3}\right)'$ Conservation du domaine de CV

$$= -\frac{z}{3} \frac{z-3-z}{(z-3)^2} = \frac{z}{(z-3)^2} \quad |z|>3$$

**(7)** méthode 1 : Décomposer en éléments simples

$$\frac{z}{z^2+4} = \frac{z}{(z-2j)(z+2j)} = z\left(\frac{A}{z-2j} + \frac{B}{z+2j}\right) \qquad A = \left[\frac{1}{z+2j}\right]_{2j} = \frac{1}{4j} = -\frac{1}{4}j$$

$$\frac{z}{z^2+4} = -\frac{1}{4}j \frac{z}{z-2j} + \frac{1}{4}j \frac{z}{z+2j} \qquad B = \left[\frac{1}{z-2j}\right]_{-2j} = \frac{1}{-4j} = \frac{1}{4}j$$

$$\frac{z}{z^2+4} \xrightarrow{Z^{-1}} -\frac{1}{4}j (2j)^m + \frac{1}{4}j(-2j)^m = -\frac{1}{4}j\, 2^m e^{j\frac{\pi}{2}m} + \frac{1}{4}j\, 2^m e^{-j\frac{\pi}{2}m} = -\frac{1}{4}j\, 2^m \left(e^{j\frac{\pi}{2}m} - e^{-j\frac{\pi}{2}m}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}j\, 2^m \times 2j \sin\left(\frac{\pi}{2}m\right)$$

$$= 2^{m-1} \sin\left(\frac{\pi}{2}m\right)$$

Claire Schmidt
IUT de Cachan - GEII 1

**Méthode 2 :** Reconnaître la transformée en z de $b^n \sin(\omega n)$

$|z| > |e^{j\omega}|$ et $|z| > |e^{-j\omega}|$ ($|e^{j\omega}| = 1$, $|e^{-j\omega}| = 1$)

$$a_n = \sin(\omega n) = \frac{e^{j\omega n} - e^{-j\omega n}}{2j} \xrightarrow{Z} \frac{1}{2j}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega}}\right) = \frac{z}{2j}\,\frac{z-e^{-j\omega} - z + e^{j\omega}}{(z-e^{j\omega})(z-e^{-j\omega})}$$

$$= \frac{z}{2j}\,\frac{\overbrace{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}^{= \sin\omega}}{z^2 - z\underbrace{(e^{j\omega}+e^{-j\omega})}_{= 2\cos\omega} + 1}$$

$e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2\cos\omega$

$e^{j\omega} - e^{-j\omega} = 2j\sin\omega$

$$A(z) = \frac{z\sin\omega}{z^2 - 2z\cos\omega + 1} \quad \text{si } |z| > 1$$

$$b^n \sin(\omega n) \xrightarrow{Z} A\left(\frac{z}{b}\right) = \frac{\frac{z}{b}\sin\omega}{\left(\frac{z}{b}\right)^2 - 2\frac{z}{b}\cos\omega + 1} = \frac{bz\sin\omega}{z^2 - 2zb\cos\omega + b^2}$$

On identifie (surtout le dénominateur) avec $\dfrac{z}{z^2+4}$ d'où $\cos\omega = 0$ et $b = 2$

$\Rightarrow$ on choisit $\omega = \frac{\pi}{2}$

$$2^n \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \xrightarrow{Z} \frac{2z\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{z^2+4} = \frac{2z}{z^2+4}$$

on a un facteur 2 en plus

$$\text{d'où } \frac{z}{z^2+4} \xrightarrow{Z^{-1}} 2^{n-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

(8) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots\}$

$a_0 = 1 \quad a_1 = 0 \quad a_2 = 0$

$a_3 = 1 \quad a_4 = 0 \quad a_5 = 0$

$a_6 = 1 \quad a_7 = 0 \quad a_8 = 0$

et plus généralement :

$a_{3p} = 1 \quad a_{3p+1} = 0 \quad a_{3p+2} = 0$

$$\text{donc } A(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} = \overset{1}{a_0} + \overset{0}{a_1} z^{-1} + \overset{0}{a_2} z^{-2} + \overset{1}{a_3} z^{-3} + \overset{0}{a_4} z^{-4} + \overset{0}{a_5} z^{-5} + \overset{1}{a_6} z^{6} + \ldots + a_n z^{n} + \ldots$$

$$= 1 + z^{-3} + z^{-6} + z^{-9} + \ldots + z^{-3p} + \ldots$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} z^{-3p} \quad \text{on reconnait une série géométrique}$$

$$\text{donc } A(z) = \sum_{p=0}^{+\infty} (z^{-3})^p = \underset{\text{1er terme}}{1} \times \frac{1}{1 - \underset{\text{raison}}{z^{-3}}} = \frac{z^3}{z^3 - 1} \quad \text{si } |z^{-3}| < 1 \Leftrightarrow |z| > 1$$

Claire Schmidt
IUT de Cachan - GEII 1

⑨ $f(t) = \frac{1}{2}t + 3$ $\quad T_e = 2$ donc $a_n = f(nT_e) = f(2n) = \frac{1}{2}(2n) + 3 = n + 3$

on a donc $a_n = n + 3 = (n+3)\,U(n)$ $\quad U(n) = 1$

$$a_n = nU(n) + 3U(n) \xrightarrow{\mathcal{Z}} \frac{z}{(z-1)^2} + 3\,\frac{z}{z-1} \qquad \forall |z| > 1$$

⑩ $$\frac{1}{(z-1)^3} = \frac{1}{(z-1)^2} \times \frac{1}{z-1} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} a_n * b_n \quad \text{avec } a_n = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right) \text{ et } b_n = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{1}{z-1}\right)$$

or $\frac{1}{(z-1)^2} = z^{-1} \times \frac{z}{(z-1)^2} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \underbrace{(n-1)\,U(n-1)}_{= a_n}$ et $\frac{1}{z-1} = z^{-1}\frac{z}{z-1} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} \underbrace{U(n-1)}_{b_n}$

donc $$c_n = a_n * b_n = \underset{0}{a_0}\,\underset{1}{b_n} + \underset{0}{a_1}\,\underset{1}{b_{n-1}} + \underset{1}{a_2}\,\underset{1}{b_{n-2}} + \dots + \underset{n-3}{a_{n-2}}\,\underset{1}{b_2} + \underset{n-2}{a_{n-1}}\,\underset{1}{b_1} + \underset{n-1}{a_n}\,\underset{0}{b_0} = 1 + 2 + \dots + (n-2)$$

$\Rightarrow c_n = (n-2)\frac{1 + n - 2}{2} = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ $\quad c_0 = a_0 b_0 = 0$ $\quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$ $\quad \Rightarrow c_n = \frac{(n-2)(n-1)}{2}\,U(n-1)$

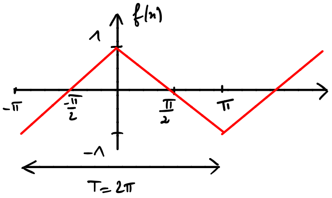
## Ex 2 :

1) $f$ est $2\pi$-périodique, paire et $\forall x \in [0, \pi]$, $f(x) = 1 - \frac{2x}{\pi}$

$f(0) = 1$

$f(\pi) = 1 - \frac{2\pi}{\pi} = -1$

$f(\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 = 0$




$f$ est paire donc $\mathcal{C}_f$ est symétrique $/(Oy)$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$

2) $$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{paire}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{x^2}{\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\left(\pi - \frac{\pi^2}{\pi}\right) = 0$$ valeur moyenne

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{paire}}\,\underbrace{\sin(nx)}_{\text{impaire}}}_{\text{impaire}}\,dx = 0$$

$f$ est paire donc pas de sin dans la décomposition en série de Fourier

Claire Schmidt
IUT de Cachan - GEii 1

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{\underbrace{f(x)}_{\text{paire}}\ \underbrace{\cos(nx)}_{\text{paire}}}_{\text{paire}}\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\cos(nx)\,dx$$

IPP $\begin{cases} u'(x) = \cos nx \\ v(x) = 1 - \frac{2x}{\pi} \end{cases}$ $\begin{cases} u(x) = \frac{\sin nx}{n} \\ v'(x) = -\frac{2}{\pi} \end{cases}$

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\left[\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}}_{0} - \int_0^{\pi} -\frac{2}{\pi}\,\frac{\sin nx}{n}\,dx\right)$$

$\begin{cases} \sin(0) = 0 \\ \sin(n\pi) = 0 \end{cases}$

$$\int \cos(\omega x)\,dx = \frac{\sin(\omega x)}{\omega} + C$$

$$\int \sin(\omega x)\,dx = -\frac{\cos(\omega x)}{\omega} + C$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \times \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi} \sin(nx)\,dx = \frac{4}{\pi^2 n}\left[\frac{-\cos nx}{n}\right]_0^{\pi}$$

$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ \cos(n\pi) = (-1)^n \end{cases}$

$$a_n = -\frac{4}{\pi^2 n^2}\left(\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n} - \underbrace{\cos 0}_{=0}\right) = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)$$

3) Finalement, la série de Fourier de f est $Sf(x) = \underbrace{a_0}_{=0} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n \cos nx + \underbrace{b_n}_{=0} \sin(nx)\right)$

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)\cos nx$$

$a_n = \frac{4}{\pi^2 n^2}\left(1-(-1)^n\right)$ donc $a_{2p} = 0$ et $a_{2p+1} = \frac{8}{\pi^2(2p+1)^2}$

donc $Sf(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2(2p+1)^2}\cos((2p+1)x)$

4) $f$ est $C^1$ par morceaux et $2\pi$-périodique, de plus $f$ est $C^0$ sur $\mathbb{R}$

donc $Sf(x) = f(x)$ en tout $x \in \mathbb{R}$ (pas de discontinuité)

on choisit $x = 0$ car $\cos 0 = 1$

$$Sf(0) = f(0) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2(2p+1)^2}\cos 0 \qquad \text{avec } f(0) = 1$$

d'où $1 = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{8}{\pi^2(2p+1)^2} \iff \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha = 2 > 1$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} \qquad (n \text{ pair ou impair})$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^2} + \frac{\pi^2}{8}$ d'où $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}\times\frac{4}{3} = \frac{\pi^2}{6}$

Claire Schmidt
IUT de Cachan - GEII 1

# Ex 3

$$f(x) = 1 - \cos x + \sin(2x)$$

a) $f(x) = 1 \iff 1 - \cos x + \sin(2x) = 1$

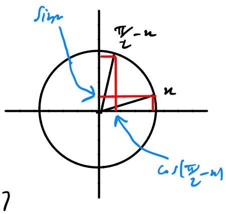
$\iff \sin(2x) = \cos x$

$\iff \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos x$

$\iff \frac{\pi}{2} - 2x = x \ (2\pi)$ ou $\frac{\pi}{2} - 2x = -x \ (2\pi)$

$\iff 3x = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$ ou $x = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$

$\iff x = \frac{\pi}{6} \ \left(\frac{2\pi}{3}\right)$ ou $x = \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$




$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}\left[\frac{2\pi}{3}\right] ; \frac{\pi}{2}\left[2\pi\right] \right\}$$

b) $f(x) = 1 - \cos x + \sin(2x)$ est déjà une série de Fourier $\quad T = 2\pi \Rightarrow \omega = 1$

$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right)$ avec $a_0 = 1 \quad a_n = 0 \ \forall n \geq 2$

$a_1 = -1$

$b_2 = 1 \quad b_0 = 0,\ b_1 = 0,\ b_n = 0 \ \forall n \geq 3$

c) Selon la formule de Parseval,

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T}\int_{[T]} f^2(x)\,dx$$

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \underbrace{a_0 + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_2^2)}_{\text{les autres termes sont nuls}} = 1 + \frac{1}{2}(1^2 + 1^2) = 2$$

Calculons $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos x + \sin 2x)\,dx$

$f^2(x) = (1 - \cos x + \sin 2x)^2 = (1 - \cos x + \sin 2x)(1 - \cos x + \sin 2x)$

$= 1 - \cos x + \sin 2x - \cos x + \cos^2 x - \cos x \sin 2x + \sin 2x - \sin 2x \cos x + \sin^2(2x)$

$= 1 - 2\cos x + 2\sin 2x \underbrace{- 2\cos x \sin 2x}_{-(\sin 3x + \sin x)} + \underbrace{\cos^2 x}_{=\frac{1+\cos(2x)}{2}} + \underbrace{\sin^2(2x)}_{=\frac{1-\cos(4x)}{2}}$

$\begin{cases} a = 2x \\ b = x \end{cases}$

$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a \cos b$

Ces formules de trigonométrie permettent de linéariser $f^2(x)$ pour pouvoir calculer une primitive

$$f^2(x) = \underbrace{1 - 2\cos x}_{\text{paire}} + \underbrace{2\sin(2x) - \sin 3x - \sin x}_{\text{impaire}} + \underbrace{1 + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos(4x)}_{\text{paire}}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(2 - 2\cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) - \frac{1}{2}\cos(4x)\right)dx = \frac{1}{\pi}\left[2x - 2\sin x + \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{1}{8}\sin(4x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \times 2\pi = 2$$

$\sin(2\pi) = \sin(4\pi) = 0$

On a bien l'égalité.