DS N°4 du 14/01/2019 - S3
Éléments de Correction

Ex 1 : $\begin{cases} a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0 \\ a_0 = 1 \quad , \quad a_1 = 0 \end{cases}$

$$a_n \xrightarrow{\mathcal{Z}} A(z)$$

$$a_{n+1} \xrightarrow{\mathcal{Z}} z\,(A(z) - a_0) = z\,(A(z) - 1)$$

$$a_{n+2} \xrightarrow{\mathcal{Z}} z^2(A(z) - a_0 - a_1 z^{-1}) = z^2(A(z) - 1)$$

On obtient :

$$z^2(A(z) - 1) - z\,(A(z) - 1) - 2A(z) = 0$$

$$\Leftrightarrow A(z)\,(z^2 - z - 2) = z^2 - z$$

$$\Leftrightarrow A(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - z - 2} \Leftrightarrow A(z) = \frac{z^2 - z - 2 + 2}{z^2 - z - 2} = 1 + \frac{2}{z^2 - z - 2} = 1 + \frac{2}{(z-2)(z+1)}$$

$$\Leftrightarrow A(z) = 1 + \frac{2/3}{z-2} + \frac{-2/3}{z+1} \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} a_n = \delta(n) + \frac{2}{3}\,2^{n-1}U(n-1) - \frac{2}{3}(-1)^{n-1}U(n-1)$$

$$a_n = \delta(n) + \frac{1}{3}\,2^n U(n-1) + \frac{2}{3}(-1)^n U(n-1)$$

Remarque : on aurait pu aussi mettre z en facteur dans $A(z)$ pour éviter le retard :

$$A(z) = z\,\frac{z-1}{z^2 - z - 2} = z\,\frac{z-1}{(z-2)(z+1)} = z\left(\frac{1/3}{z-2} + \frac{2/3}{z+1}\right) = \frac{1}{3}\,\frac{z}{z-2} + \frac{2}{3}\,\frac{z}{z+1}$$

d'où $a_n = \frac{1}{3}\,2^n U(n) + \frac{2}{3}(-1)^n U(n)$

Les 2 résultats sont équivalents car $\begin{cases} \delta(0) = 1 \quad \text{et} \quad a_0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 \\ \forall n \geq 1 \quad U(n-1) = 1 \;,\; U(n) = 1 \quad \text{et} \quad \delta(n) = 0 \end{cases}$

2ème méthode : $a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0$

moyen mnémotechnique		
a_{n+2}	$\longleftrightarrow$	r^2
a_{n+1}	$\longleftrightarrow$	r
a_n	$\longleftrightarrow$	1

(e) $r^2 - r - 2 = 0$

$\Leftrightarrow (r-2)(r+1) = 0$

$r_1 = 2$ et $r_2 = -1$

$a_n = A\,2^n + B\,(-1)^n$ avec $\begin{cases} a_0 = A + B = 1 & (L_1) \\ a_1 = 2A - B = 0 & (L_2) \end{cases}$

$(L_1) + (L_2)$ $3A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$

d'où $B = 1 - A = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{3}\,2^n + \frac{2}{3}(-1)^n$$

Ex 2

$f(x,y) = \ln(x^2 y)$ $\qquad (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

f est définie et dérivable si $x^2 y > 0 \iff y > 0$ et $x \neq 0$ car un carré est toujours positif.

$D_f = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}_+^*$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2 y} = \dfrac{2}{x}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x^2}{x^2 y} = \dfrac{1}{y}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{2}{x}\right) = -\dfrac{2}{x^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{2}{x}\right) = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\dfrac{1}{y^2}$

$g(x,y) = x^3 y - 2xy + 3y$ $\qquad g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^2$

$\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 3x^2 y - 2y$

$\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x^3 - 2x + 3$

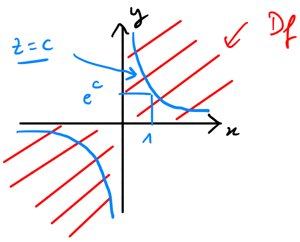
$\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2 y - 2y) = 6y$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2 y - 2y) = 3x^2 - 2$

$\dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}(x^3 - 2x + 3) = 0$

Ex 3 :

1) $f(x,y) = \ln(xy)$ est définie si $xy > 0 \iff \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$

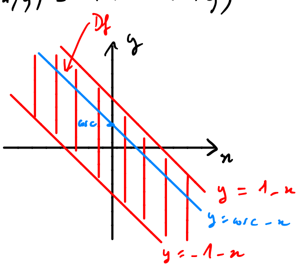


Soit $c \in \mathbb{R}$

$z = c \iff \ln(xy) = c \iff xy = e^c$

$\iff y = \dfrac{e^c}{x}$ hyperbole

2) $g(x,y) = \operatorname{Arccos}(x+y)$ est définie si $-1 \leq x+y \leq 1 \iff -1-x \leq y \leq 1-x$



Rappel : $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ bijective car C^0 et décroissante

$\arccos : [-1;1] \to [0,\pi]$ sa réciproque

Soit $c \in [0,\pi]$

$z = c \iff \arccos(x+y) = c$

$\iff x + y = \cos c$

$\iff y = -x + \cos c$ droite

La surface est donc située entre les plans horizontaux d'équation $z = 0$ et $z = \pi$.

Ex 4 : a) $\omega_1 = 3x^2y\,dx + (x^3+xy)\,dy$

$$\begin{cases} P(x,y) = 3x^2y \\ Q(x,y) = x^3 + xy \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 + y$$

$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ donc ω_1 n'est pas exacte

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\omega_2 = \frac{2xy\,dx + x^2dy}{1 + x^4y^2}$$

$$P(x,y) = \frac{2xy}{1+x^4y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x \times (1+x^4y^2) - 2xy \times 2yx^4}{(1+x^4y^2)^2} = \frac{2x + 2x^5y^2 - 4x^5y^2}{(1+x^4y^2)^2} = \frac{2x - 2x^5y^2}{(1+x^4y^2)^2}$$

$$Q(x,y) = \frac{x^2}{1+x^4y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2x\,(1+x^4y^2) - x^2 \times 4x^3y^2}{(1+x^4y^2)^2} = \frac{2x + 2x^5y^2 - 4x^5y^2}{(1+x^4y^2)^2} = \frac{2x - 2x^5y^2}{(1+x^4y^2)^2}$$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ donc ω_2 est exacte

b) ω_2 est exacte $\Rightarrow \exists f \,/\, \omega_2 = df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{1+x^4y^2} & (1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{1+x^4y^2} & (2) \end{cases}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$(1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy}{1+(x^2y)^2}$ $\quad u(x,y) = x^2y \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2$

$\Rightarrow f(x,y) = \arctan(x^2y) + C(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{1+(x^2y)^2} + C'(y) = \frac{x^2}{1+x^4y^2}$ d'après (2)

donc $C'(y) = 0$ donc $C(y) = K$ donc $f(x,y) = \arctan(x^2y) + K$ $\quad (K = \text{constante})$

c) $f(1,1) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow f(1,1) = \arctan(1) + K = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} + K = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow K = -\frac{\pi}{2}$

d'où $f(x,y) = \arctan(x^2y) - \frac{\pi}{2}$

Ex 5 : $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13$ est définie sur $D_f = \mathbb{R}^2$

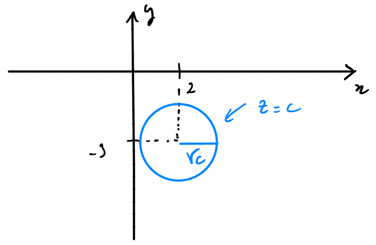
On met sous forme canonique :

$$f(x,y) = x^2 - 4x + y^2 + 6y + 13$$
$$f(x,y) = x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 + y^2 + 6y + 3^2 - 3^2 + 13$$
$$f(x,y) = (x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 + 13$$
$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y+3)^2$$

On reconnait la forme $X^2 + Y^2$ avec $X = x - 2$ et $Y = y + 3$

$$f(x,y) = (x-2)^2 + (y+3)^2$$

Ligne de niveau :

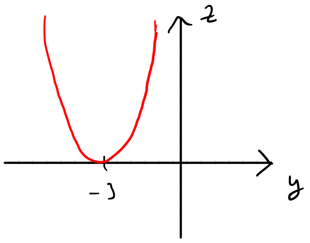


$z = c \iff (x-2)^2 + (y+3)^2 = c$

si $c > 0$, c'est le cercle de centre $\Omega(2,-3)$ et de rayon $\sqrt{c}$

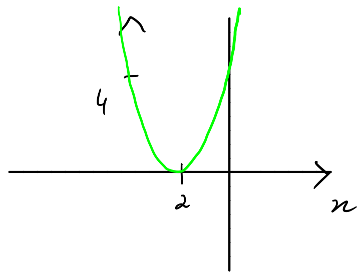
Courbe coordonnée $x = 2$

$$z = (y+3)^2$$

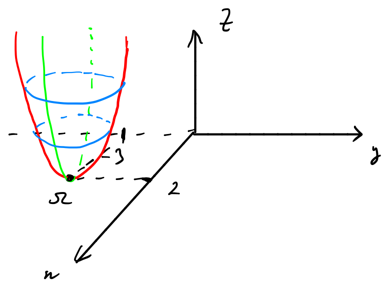


Courbe coordonnée $y = -3$

$$z = (x-2)^2$$



Surface représentative :



On peut aussi remarquer qu'il s'agit de la surface $z = x^2 + y^2$ dans le repère d'origine $\Omega(2,-3,0)$