DS 2 du 14/10/2019
Eléments de Correction

Ex 1

a) $\dfrac{x^2+x-12}{2-x} \leq 0 \iff \dfrac{(x-3)(x+4)}{2-x} \leq 0$

x		-4		2		3	
x^2+x-12	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$
$2-x$	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$
$\dfrac{x^2+x-12}{2-x}$	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$

x^2+x-12 est du signe de a à l'extérieur des racines $x_1 = 3$ et $x_2 = -4$

$S = [-4\,;2[\cup [3\,;+\infty[$

b) $|x-3| \leq 4 \iff -4 \leq x-3 \leq 4 \iff -4+3 \leq x \leq 4+3$

$\iff -1 \leq x \leq 7$

on utilise : $|X| \leq a \iff -a \leq X \leq a \quad (a>0)$

c) $|x-2| - |1-2x| = 6$ on note $f(x) = |x-2| - |1-2x|$

$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x-2 \geqslant 0 \iff x \geqslant 2 \\ -x+2 & \text{si } x-2 \leq 0 \iff x \leq 2 \end{cases}$

$|1-2x| = \begin{cases} 1-2x & \text{si } 1-2x \geqslant 0 \iff x \leq \frac{1}{2} \\ -1+2x & \text{si } x \geqslant \frac{1}{2} \end{cases}$

x		$1/2$		2	
$\|x-2\|$	$-x+2$		$-x+2$	0	$x-2$
$\|1-2x\|$	$1-2x$	0	$-1+2x$		$-1+2x$
$f(x)$	$x+1$		$-3x+3$		$-x-1$
$f(x)=6$	$x=5>\frac{1}{2}$ $\emptyset$		$x=-1<\frac{1}{2}$ $\emptyset$		$x=-7<2$ $\emptyset$

Pensez à vérifier les intervalles !

On trouve $S = \emptyset$

Ex 2

1) $(n+1)(n+2)(n+3) = (\boxed{n}+\boxed{3})(n+1)(n+2)$
$= \boxed{n}(n+1)(n+2) + \boxed{3}(n+1)(n+2)$

donc $a = 3$

2) $P(n)$: $n(n+1)(n+2)+6$ est un multiple de 3

Initialisation : si $n=0$ $6 = 2\times 3$ donc $P(0)$ est vrai

Hérédité : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

on suppose que $n(n+1)(n+2)+6$ est un multiple de 3 pour un n fixé, $n \geq 0$

on démontre que $(n+1)(n+2)(n+3)+6$ est un multiple de 3

on a $(n+1)(n+2)(n+3)+6 = n(n+1)(n+2)+3(n+1)(n+2)+6$ d'après le 1)

$$= \underbrace{n(n+1)(n+2)+6}_{\text{multiple de 3 d'après } P(n)} + \underbrace{3(n+1)(n+2)}_{\text{multiple de 3}}$$

donc $P(n+1)$ est vrai

Conclusion : $P(n)$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Les nombres n, $n+1$ et $n+2$ sont consécutifs donc au moins l'un des trois est un multiple de 3 donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

donc $n(n+1)(n+2)+6$ aussi (car $6 = 2\times 3$)

Ex 3

$$A_N = \sum_{n=0}^{N} (1 + \overbrace{3n}^{u_0 + rn}) = 1 \overset{+3}{+} 4 \overset{+3}{+} 7 + \dots + (1+3N)$$

$u_n = 1+3n$ est une suite arithmétique

$$A_N = (\overbrace{N-0+1}^{\text{nombre de termes}}) \frac{\overbrace{\boxed{1}}^{u_0} + \overbrace{\boxed{1+3N}}^{u_N}}{2} = \frac{(N+1)(2+3N)}{2}$$

$$B_N = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+2} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+3} = \left(\frac{1}{2} + \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{N+2}}\right) - \left(\cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \cancel{\dots} + \cancel{\frac{1}{N+2}} + \frac{1}{N+3}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{N+3}$$

Ex 4

$a = 5600 = 56 \times 100 = 7 \times 8 \times 25 \times 4 = 7 \times 2^3 \times 5^2 \times 2^2 = 2^5 \times 5^2 \times 7$

$b = 490 = 49 \times 10 = 7^2 \times 2 \times 5 = 2 \times 5 \times 7^2$

PGCD $= 2 \times 5 \times 7 = 70$ (nombres premiers en commun, + petite puissance)

PPCM $= 2^5 \times 5^2 \times 7^2 = 5600 \times 7 = 39200$ (tous les nombres premiers, + grande puissance)

2e méthode : Algorithme d'Euclide

$5600 = 490 \times 11 + 210$

$490 = 210 \times 2 + \boxed{70}$

$210 = 70 \times 3 + 0$

PGCD = dernier reste non nul = 70

$$\begin{array}{r} 490 \\ \times\ 11 \\ \hline 490 \\ 4900 \\ \hline 5390 \end{array}$$

PPCM $\times$ PGCD $= a \times b \Rightarrow$ PPCM $= \dfrac{5600 \times 490}{70} = 5600 \times 7 = 39200$

Ex 5

1) $C_8^6 = \dfrac{8!}{6!\,2!}$ $\qquad C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$C_8^6 = \dfrac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 1 \times 2} = \dfrac{7 \times 8}{2} = 7 \times 4 = 28$

2)
1 1
1 2 1
1 3 3 1

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (signes alternés)

$(4+x)^3 = 4^3 + 3 \times 4^2 \times x + 3 \times 4 \times x^2 + x^3$

$\ominus$ $(4-x)^3 = 4^3 - 3 \times 4^2 x + 3 \times 4 x^2 - x^3$

$\Rightarrow (4+x)^3 - (4-x)^3 = 2 \times 3 \times 4^2 x + 2x^3 = 96x + 2x^3$

3) $A = \dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{1 \times 2 \times \dots \times (n-1) \times n}{1 \times 2 \times \dots \times (n-1)} = n$

$B = \dfrac{2}{(n+1)!} + \dfrac{1}{n!} = \dfrac{2}{(n+1)!} + \dfrac{1 \times (n+1)}{n! \times (n+1)} = \dfrac{2}{(n+1)!} + \dfrac{n+1}{(n+1)!} = \dfrac{n+3}{(n+1)!}$