Devoir-Maison (extraits de DS de 2017)
A rendre le mercredi 10 octobre – Préparation au DS N°2

Exercice 1 :

Soit une suite u_n définie pour tout $n \in IN$ par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - n$.

Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN$, $u_n = 2^n + n + 1$

Exercice 2 :

1) Calculer :

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} 3^k$$

$$B_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right)$$

2) (u_n) est une suite arithmétique telle que $u_1 = 2$ et $u_5 = 14$, et (v_n) est une suite arithmétique de raison r.

   On pose $w_n = u_n + v_n$ et on sait que $w_7 = 37$ et que $\sum_{n=1}^{7} w_n = 154$.

   a) Expliquer pourquoi (w_n) est une suite arithmétique
   b) Calculer le premier terme u_0 et la raison de (u_n)
   c) Calculer la raison de (w_n) et en déduire la valeur de r.

Exercice 3

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{2\times 1} + \frac{1}{3\times 2} + \frac{1}{4\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n-1)}$$

1) Déterminer S_2, S_3 et S_4.

2) Montrer que : $\frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

3) En déduire une simplification de S_n. Vérifier que les résultats obtenus à la question 1) sont logiques.

4) Proposer une démonstration par récurrence pour le résultat du 3)

Exercice 4

1) Calculer $\frac{11!}{9!}$ et $\frac{n!}{(n-2)!}$
2) Quel est le coefficient de x^3 dans le développement de $(x+4)^5$? Justifier.
3) Résoudre dans IR :
   a. $x^2 + 8x - 9 = 0$
   b. $e^{2x} - 6e^x + 9 = 0$