Exercice 7 : énoncé

1) On souhaite résoudre grâce à la transformée de Laplace l'équation différentielle $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=e^{-t}U(t)$ (on note *U(t)* la fonction échelon unité) avec les conditions initiales $y'(0)=1$ et $y(0)=1$.
   a) Calculer la transformée de Laplace des fonctions $f(t)=e^{-t}U(t)$ et $g(t)=e^{-t}\sin(t)U(t)$. On les notera *F(p)* et *G(p)* respectivement.
   b) Soit *Y(p)* la transformée de Laplace de *y(t)*. Quelle équation vérifie *Y(p)* ?
   c) Décomposer $H(p)=\dfrac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)}$ en éléments simples.
   d) En déduire *y(t)*

2) Résoudre par la méthode classique l'équation différentielle de la question 1). Vérifier que vous obtenez bien les mêmes résultats

Exercice 7 : solution

1) a) $f(t)=e^{-t}U(t)\xrightarrow{L}\dfrac{1}{p+1}$ si p > -1 car $e^{\omega t}U(t)\xrightarrow{L}\dfrac{1}{p-\omega}$ si p > ω

De plus, $\sin t\, U(t)\xrightarrow{L}\dfrac{1}{p^2+1}$ donc $g(t)=e^{-t}\sin(t)U(t)\xrightarrow{L}\dfrac{1}{(p+1)^2+1}=\dfrac{1}{p^2+2p+2}$ car $e^{\omega t}f(t)\xrightarrow{L}F(p-\omega)$ si $f(t)\xrightarrow{L}F(p)$

b)

On applique la transformée de Laplace à l'équation différentielle

$y''(t)+2y'(t)+2y(t)=e^{-t}U(t)$

On a $y(t)\xrightarrow{L}Y(p)$

$y'(t)\xrightarrow{L}pY(p)-y(0)=pY(p)-1$

$y''(t)\xrightarrow{L}p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p-1$

$e^{-t}U(t)\xrightarrow{L}\dfrac{1}{p+1}$

Donc on obtient:

$$p^2Y(p)-p-1+2(pY(p)-1)+2Y(p)=\frac{1}{p+1}$$

$$\Leftrightarrow (p^2+2p+2)Y(p)=p+3+\frac{1}{p+1}$$

$$\Leftrightarrow Y(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+2}+\frac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)}$$

c) $H(p)=\dfrac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)}=\dfrac{Ap+B}{p^2+2p+2}+\dfrac{C}{p+1}$ car le polynôme p^2+2p+2 est irréductible dans IR (pas de racines réelles, autrement dit le delta est négatif).

On a $C=\left[\dfrac{1}{p^2+2p+2}\right]_{-1}=1$

Pour trouver A et B:

Méthode 1: Les racines de p^2+2p+2 sont p=-1+j et p=-1-j

En effet, $p^2+2p+2=(p+1)^2+1=(p+1)^2-j^2=(p+1-j)(p+1+j)$

On peut aussi faire un delta: on obtient $\Delta=-4=(2j)^2$ et donc $\delta=2j$ d'où

$$p=\frac{-b\pm\delta}{2a}=\frac{-2\pm 2j}{2}=-1\pm j$$

$$\frac{1}{(p+1)}=Ap+B+\frac{C(p^2+2p+2)}{p+1}$$

$$\Rightarrow A(-1+j)+B=\left[\frac{1}{p+1}\right]_{-1+j}$$

$$\Rightarrow(-A+B)+Aj=\frac{1}{j}=-j\Rightarrow\begin{cases}-A+B=0\\ A=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}B=-1\\ A=-1\end{cases}$$

Méthode 2 : $pH(p)=\dfrac{p}{(p^2+2p+2)(p+1)}=\dfrac{Ap^2+Bp}{p^2+2p+2}+\dfrac{Cp}{p+1}$ donc

$$\lim_{p\to+\infty}pH(p)=0=A+C$$

D'où $A = -C = -1$

Pour trouver B, on prend une valeur particulière, par exemple p=0

$H(0)=\dfrac{1}{2}=\dfrac{B}{2}+C$ donc $\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{2}-C=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow B=-1$

Méthode 3 :

Mettre au même dénominateur et identifier :

$$\frac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)}=\frac{Ap+B}{p^2+2p+2}+\frac{1}{p+1}=\frac{(Ap+B)(p+1)+p^2+2p+2}{(p^2+2p+2)(p+1)}$$

$$\Leftrightarrow 1=(Ap+B)(p+1)+p^2+2p+2$$

$$\Leftrightarrow 1=(A+1)p^2+(A+B+2)p+B+2$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}A+1=0\\ A+B+2=0\\ B+2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-1\\ B=-1\end{cases}$$

On a utilisé le fait que deux polynômes sont égaux si et ssi ils ont les mêmes coefficients

On trouve finalement

$$H(p)=\frac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)}=\frac{-p-1}{p^2+2p+2}+\frac{1}{p+1}$$

d) On a donc :

$$Y(p)=\frac{p+3}{p^2+2p+2}+\frac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)}=\frac{p+3}{p^2+2p+2}+\frac{-p-1}{p^2+2p+2}+\frac{1}{p+1}$$

$Y(p)=\dfrac{2}{(p+1)^2+1}+\dfrac{1}{p+1}\xrightarrow{L}y(t)=(2e^{-t}\sin t+e^{-t})U(t)$ d'après la question a)

2) Méthode classique de resolution:

$y''(t)+2y'(t)+2y(t)=e^{-t}$ avec $y'(0)=1$ et $y(0)=1$.

On résout l'équation sans seconde membre $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=0$

L'équation caractéristique est $r^2+2r+2=0$ dont les solutions sont (vu plus haut)

$r=\dfrac{-b\pm\delta}{2a}=\dfrac{-2\pm 2j}{2}=-1\pm j$ d'où $\alpha=-1\, et\ \beta=1$

On a donc $y_0=e^{\alpha t}(C\cos\beta t+D\sin\beta t)=e^{-t}(C\cos t+D\sin t)$

On cherche ensuite une solution particulière de $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=e^{-t}$

sous la forme $y_1=ae^{-t}$

On a alors $y_1'=-ae^{-t}$ et $y_1''=ae^{-t}$, donc, en injectant dans l'équation:

$ae^{-t}-2ae^{-t}+2ae^{-t}=e^{-t}$ d'où a=1 et $y_1=e^{-t}$

Finalement, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit

$y(t)=y_0(t)+y_1(t)=e^{-t}(C\cos t+D\sin t)+e^{-t}$

Il reste à appliquer les conditions initiales $y'(0)=1$ et $y(0)=1$.

$y(0)=C+1=1$ donc C=0

$\Rightarrow y(t)=De^{-t}\sin t+e^{-t}\Rightarrow y'(t)=-De^{-t}\sin t+De^{-t}\cos t-e^{-t}$

D'où $y'(0)=D-1=1$ donc D=2

On obtient bien $y(t)=2e^{-t}\sin t+e^{-t}$