Exercices d'entraînement
au DS 2 du Lundi 3 novembre 2019

Séries entières et Transformation de Laplace

Exercice 1

Calculer les séries entières suivantes en précisant leur domaine de convergence

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1}$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{n!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

Exercice 2

1) Développer en série entière la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x - xe^{2x}$. On précisera le domaine de validité et on simplifiera le résultat au maximum.

2) Même question pour $f(x)=\frac{1}{(x-3)(x-4)}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{3;4\}$

Exercice 3

Résoudre à l'aide des séries entières l'équation différentielle : $x^2y''+4xy'+2y=e^x$

Exercice 4

1) Soit *U* la fonction échelon unité. Calculer la transformée de Laplace de *U(x)* et de *xU(x)* à l'aide d'un calcul d'intégrale.
2) En déduire la transformée de Laplace de $f(x)=(x-2)U(x-2)$, de $g(x)=U(x-2)-U(x-3)$ puis de $h(x)=(-x+1)(U(x)-U(x-1))$
3) Tracer les courbes représentatives de *f*, *g* et *h* sur trois graphes distincts.

Exercice 5

Compléter le tableau (justifier):

$f(x)$	$F(p)$
$(3x^2-5x+1)U(x)$	
	$\frac{3}{p-4}$
$x^3e^{2x}U(x)$	
$[\cos(3x)-2\sin(3x)]U(x)$	
	$\frac{p+1}{p^2-5p+6}$

Exercice 6

Résoudre à l'aide de la transformation de Laplace l'équation différentielle :

$y''(x)-4y'(x)-5y(x)=0$ avec $y(0)=-1$ et $y'(0)=0$

Exercice 7 : problème

1) On souhaite résoudre grâce à la transformée de Laplace l'équation différentielle $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=e^{-t}U(t)$ (on note *U(t)* la fonction échelon unité) avec les conditions initiales $y'(0)=1$ et $y(0)=1$.
    a) Calculer la transformée de Laplace des fonctions $f(t)=e^{-t}U(t)$ et $g(t)=e^{-t}\sin(t)U(t)$. On les notera *F(p)* et *G(p)* respectivement.
    b) Soit *Y(p)* la transformée de Laplace de *y(t)*. Quelle équation vérifie *Y(p)* ?
    c) Décomposer $H(p)=\dfrac{1}{(p^2+2p+2)(p+1)}$ en éléments simples.
    d) En déduire *y(t)*

2) Résoudre par la méthode classique l'équation différentielle de la question 1). Vérifier que vous obtenez bien les mêmes résultats