Exercices d'entraînement
au DS 3 du Lundi 30 novembre 2020

Séries entières et Transformation de Fourier

Exercice 1

Calculer les séries entières suivantes en précisant leur domaine de convergence

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2x^n}{(n-1)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

Exercice 2

1) Développer en série entière la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - xe^{2x}$. On précisera le domaine de validité et on simplifiera le résultat au maximum.

2) Même question pour $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-4)}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3;4\}$

Exercice 3

Résoudre à l'aide des séries entières l'équation différentielle : $x^2 y'' + 4xy' + 2y = e^x$

Exercice 4

On définit la fonction « porte » Π par $\begin{cases} \Pi(x) = 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \Pi(x) = 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$ et la fonction h par : $h(x) = \begin{cases} 2 & si\ 4 < x < 5 \\ 1 & si -1 < x < 1 \\ 0 & Sinon \end{cases}$

1) A l'aide d'un calcul d'intégrale, déterminer la transformée de Fourier de la fonction porte.
2) Tracer le graphe de la fonction *h*. Exprimer la fonction *h* à l'aide de la fonction porte, puis en déduire sa transformée de Fourier. On utilisera les propriétés de la transformation de Fourier.
3) Retrouver la transformée de Fourier de h à l'aide d'un calcul d'intégrale.

Exercice 5

Soit la fonction *f* définie par *f*(*x*) = exp (-*x*) *U* (*x*) où *U* est la fonction « unité » c'est-à-dire la fonction définie par *U*(*x*) = 1 si *x* est positif ou nul et *U*(*x*) = 0 sinon.

a) Représenter le graphe de la fonction *f*.

b) Calculer sa transformée de Fourier ; en déduire sans aucun calcul la valeur de : $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

c) Résoudre l'équation *F*(*p*) = 2.