Exercices d'entraînement au DS 3 du Lundi 30 novembre 2020

Séries entières et Transformation de Fourier

Exercice 1
Calculer les séries entières suivantes en précisant leur domaine de convergence

a) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n+1}$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2x^n}{(n-1)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

Exercice 2
1) Développer en série entière la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - xe^{2x}$. On précisera le domaine de validité et on simplifiera le résultat au maximum.
2) Même question pour $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-4)}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3;4\}$

Exercice 3
Résoudre à l'aide des séries entières l'équation différentielle : $x^2 y'' + 4xy' + 2y = e^x$

Exercice 4
On définit la fonction « porte » Π par $\begin{cases} \Pi(x) = 1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \Pi(x) = 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$ et la fonction h par : $h(x) = \begin{cases} 2 & si\ 4 < x < 5 \\ 1 & si -1 < x < 1 \\ 0 & Sinon \end{cases}$

1) A l'aide d'un calcul d'intégrale, déterminer la transformée de Fourier de la fonction porte.
2) Tracer le graphe de la fonction *h*. Exprimer la fonction *h* à l'aide de la fonction porte, puis en déduire sa transformée de Fourier. On utilisera les propriétés de la transformation de Fourier.
3) Retrouver la transformée de Fourier de h à l'aide d'un calcul d'intégrale.

Exercice 5
Soit la fonction *f* définie par $f(x) = \exp(-x)\ U(x)$ où U est la fonction « unité » c'est-à-dire la fonction définie par $U(x) = 1$ si x est positif ou nul et $U(x) = 0$ sinon.

a) Représenter le graphe de la fonction *f*.

b) Calculer sa transformée de Fourier ; en déduire sans aucun calcul la valeur de : $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$

c) Résoudre l'équation $F(p) = 2$.

Exercices d'entraînements au DS 3 du lundi 30/11/2020 - Corrigé

Series Entieres et Transformation de Fourier

Ex 1 :

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n+1} = x \times \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} = x \times x^2 \times \frac{1}{1-x^2} = \frac{x^3}{1-x^2}$ si $|x|<1$

$\sum_{n=1}^{+\infty} X^n = X \cdot \frac{1}{1-X}$ si $|X|<1$

b) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2x^n}{(n-1)!}$ changement d'indice $n'=n-1 \Leftrightarrow n = n'+1$

n	2	$+\infty$
n'	1	$+\infty$

$= \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{2x^{n'+1}}{n'!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^{n+1}}{n!} = 2x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 2x\left(e^x - 1\right)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} = e^X \quad \forall X \in \mathbb{R}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)' = x\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$ si $|x|<1$

d) $\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}\right)' = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{x^{n'}}{n'}$ en posant $n'=n-1$

Vu en exercice

or $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$ si $|x|<1$

(à savoir redémontrer : il suffit de dériver)

donc $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \int -\ln(1-x)\,dx$ si $|x|<1$

IPP $u'(x) = 1$ $\quad u(x) = x$

$v(x) = -\ln(1-x)$ $\quad v'(x) = \frac{1}{1-x}$

donc $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = -x\ln(1-x) - \int \frac{x}{1-x}\,dx$ $\quad$ or $\frac{-x}{1-x} = \frac{1-x-1}{1-x} = 1 - \frac{1}{1-x}$

$= -x\ln(1-x) + \int\left(1 - \frac{1}{1-x}\right)dx$ $\quad \forall |x|<1$

$= \boxed{-x\ln(1-x) + x + \ln(1-x) + C}$ avec $C=0$ (prendre $x=0$)

Une série entière conserve son rayon de convergence par dérivation et intégration.

$x^n\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$ $\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \ldots$

Claire Schmidt
GEII 1 - S3

2^e méthode :

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} x^n \quad \text{or} \quad \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$ (deux série de rayon de CV $R=1$)

$n' = n-1$

$\Leftrightarrow n = n'+1$

n	2	$+\infty$
n'	1	$+\infty$

$$= \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{x^{n'+1}}{n'} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

Vu en exercice

$$\text{or} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$$ si $|x| < 1$

$$= x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x \right)$$

$$= -x \ln(1-x) + \ln(1-x) + x \quad \text{si } |x| < 1$$

Ex 2 :

1) $f(x) = e^x - x e^{2x}$ or $\boxed{e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n x^{n+1}}{n!}$ car $\begin{cases} x \times x^n = x^{n+1} \\ (2x)^n = 2^n \times x^n \end{cases}$

$\downarrow$

changement d'indice $n' = n+1 \iff n = n'-1$

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{2^{n'-1} x^{n'}}{(n'-1)!}$

$f(x) = \underbrace{1}_{\text{terme d'indice } n=0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n!} - \frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \right) x^n$

$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - n 2^{n-1}}{n!} x^n = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 - n 2^{n-1}}{n!} x^n}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$ avec $A = \left[\frac{1}{x-4} \right]_3 = -1$

donc $f(x) = \frac{-1}{x-3} + \frac{1}{x-4}$ $\qquad B = \left[\frac{1}{x-3} \right]_4 = 1$

$f(x) = \frac{1}{3-x} - \frac{1}{4-x} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - x/3} - \frac{1}{4} \frac{1}{1 - x/4}$

or $\frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n$ si $|X| < 1$

donc $f(x) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$ si $\begin{cases} \left|\frac{x}{3}\right| < 1 \iff |x| < 3 \\ \text{ET} \\ \left|\frac{x}{4}\right| < 1 \iff |x| < 4 \end{cases}$

$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3^{n+1}} - \frac{1}{4^{n+1}} \right) x^n \text{ si } |x| < 3}$ car $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^{n+1}}$

Ex 3 : (E) $x^2y'' + 4xy' + 2y = e^x$

on pose $y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$\Rightarrow$ $y' = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $y'' = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

$$(E) \Rightarrow x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}}_{e^x}$$

soit $\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 4n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n(n-1)a_n + 4n a_n + 2a_n\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(n^2 + 3n + 2\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Deux séries entières sont égales si et ssi elles ont les mêmes coefficients !

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n(n^2+3n+2) = \frac{1}{n!}$$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n(n+1)(n+2) = \frac{1}{n!} \quad \text{soit} \quad a_n = \frac{1}{n!(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+2)!}$$

donc $y = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)!} x^n \underset{\text{si } x \neq 0}{=} \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{n'=2}^{+\infty} \frac{x^{n'}}{n'!} = \frac{1}{x^2}\left(e^x - \underset{n=0}{1} - \underset{n=1}{x}\right)$

$n' = n+2$

Finalement, $\boxed{y = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}}$ $\forall x \in \mathbb{R}^*$ et $y(0) = \frac{1}{2}$

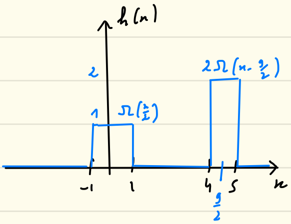
Exercice 4

On définit la fonction « porte » Π par $\begin{cases} \Pi(x)=1 & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ \Pi(x)=0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases}$ et la fonction h par : $h(x) = \begin{cases} 2 & si\ 4<x<5 \\ 1 & si -1<x<1 \\ 0 & Sinon \end{cases}$

1) A l'aide d'un calcul d'intégrale, déterminer la transformée de Fourier de la fonction porte.
2) Tracer le graphe de la fonction h. Exprimer la fonction h à l'aide de la fonction porte, puis en déduire sa transformée de Fourier. On utilisera les propriétés de la transformation de Fourier.
3) Retrouver la transformée de Fourier de h à l'aide d'un calcul d'intégrale.

1) cf cours

2)



$$h(x) = \Pi\left(\frac{x}{2}\right) + 2\,\Pi\left(x - \frac{9}{2}\right)$$

$$f(ax) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

$$f(x-x_0) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-2j\pi p x_0} F(p)$$

donc $H(p) = 2F(2p) + 2\, e^{-2j\pi p \times \frac{9}{2}} F(p)$

où $F(p) = \dfrac{\sin \pi p}{\pi p}$

donc $H(p) = \dfrac{\sin 2\pi p}{\pi p} + e^{-9j\pi p} \dfrac{\sin \pi p}{\pi p}$

3) $$H(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\, e^{-2j\pi p x}\, dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} 1\, e^{-2j\pi p x}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{4}^{5} 2\, e^{-2j\pi p x}\, dx}_{I_2}$$

par parité :

$$I_1 = 2\int_0^1 \cos(2\pi p x)\, dx = 2\left[\frac{\sin(2\pi p x)}{2\pi p}\right]_0^1 = 2\,\frac{\sin 2\pi p}{2\pi p} = \frac{\sin 2\pi p}{\pi p}$$

De plus :

$$I_2 = 2\left[\frac{e^{-2j\pi p x}}{-2j\pi p}\right]_4^5 = 2\,\frac{e^{-10j\pi p} - e^{-8j\pi p}}{-2j\pi p} = 2\, e^{-9j\pi p}\,\frac{e^{-j\pi p} - e^{j\pi p}}{-2j\pi p} = 2\, e^{-9j\pi p}\,\frac{\sin \pi p}{\pi p}$$

donc $H(p) = \dfrac{\sin 2\pi p}{\pi p} + e^{-9j\pi p} \dfrac{\sin \pi p}{\pi p}$

Exercice 5

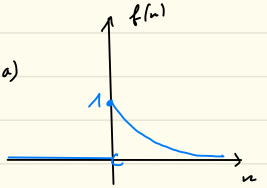
Soit la fonction f définie par $f(x) = \exp(-x)\, U(x)$ où U est la fonction « unité » c'est-à-dire la fonction définie par $U(x) = 1$ si x est positif ou nul et $U(x) = 0$ sinon.

a) Représenter le graphe de la fonction f.

b) Calculer sa transformée de Fourier ; en déduire sans aucun calcul la valeur de : $\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx$

c) Résoudre l'équation $F(p) = 2$.

a)



b) $F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2j\pi p x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-x} e^{-2j\pi p x}\, dx$

$F(p) = \int_{0}^{+\infty} e^{-x(1+2j\pi p)}\, dx = \left[\frac{e^{-x(1+2j\pi p)}}{-(1+2j\pi p)} \right]_0^{+\infty}$

or $\lim_{x \to +\infty} e^{-x(1+2j\pi p)} = 0$ donc $F(p) = \frac{1}{1+2j\pi p}$

on a donc $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{-2j\pi p x}\, dx = \frac{1}{1+2j\pi p}$

si on prend $p = 0$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$

c) $F(p) = 2 \iff \frac{1}{1+2j\pi p} = 2 \iff 2(1+2j\pi p) = 1$ $\qquad 1+2j\pi p \neq 0$

$\iff 2j\pi p = -\frac{1}{2}$

$\iff p = \frac{-1}{4j\pi} = \frac{j}{4\pi}$

$S = \left\{ \frac{j}{4\pi} \right\}$