Fonctions réciproques

Soit f une fonction strictement monotone et continue sur I à valeur dans J alors f est bijective de I dans J.

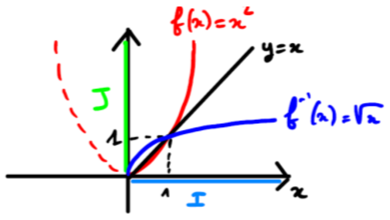
Ce qui signifie que, à tout réel $y \in J$ on peut associer un et un seul réel $x \in I$ tel que $y = f(x)$

On peut alors définir sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ par :

Soit $x \in I$, $y \in J$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$

Les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à l'axe y=x

De plus, $f(f^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in J$; $\quad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in I$



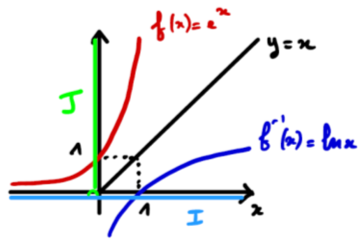
$f : x \mapsto x^2$ est une fonction strictement croissante et continue sur I=$\mathbb{R}^+$ à valeur dans J=$\mathbb{R}^+$ donc f est bijective de I dans J.

Soient $x \geq 0, y \geq 0$ alors

$y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$

$f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$x \mapsto \sqrt{x}$



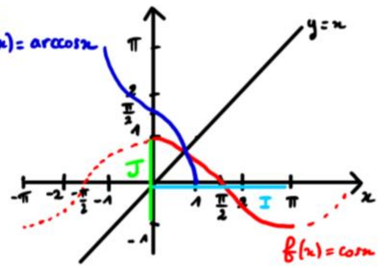
$f : x \mapsto e^x$ est une fonction strictement croissante et continue sur I=$\mathbb{R}$ à valeur dans J=$\mathbb{R}^{+*}$ donc f est bijective de I dans J.

Soient $x \in \mathbb{R}, y > 0$ alors

$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

$f^{-1} : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \ln x$



$f : x \mapsto \cos x$ est une fonction strictement décroissante et continue sur I=[0 ; π] à valeur dans J=[-1 ;1] donc f est bijective de I dans J.

Soient $x \in [0;\pi], y \in [-1;1]$ alors

$y = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos y$

$f^{-1} : [-1;1] \to [0;\pi]$

$x \mapsto \arccos x$

arccos(x) est l'angle compris entre 0 et π dont le cosinus vaut x.

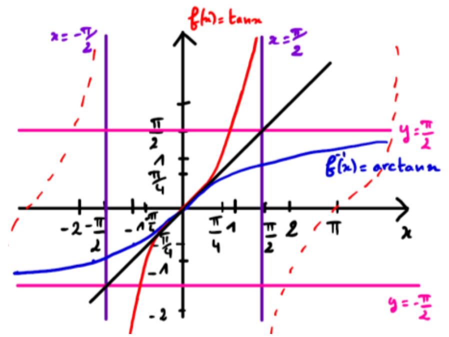
Par ex, $\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ car $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\arccos(\cos x) = x \quad \forall x \in [0;\pi]$

$\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1;1]$

$\cos^2(\arccos x) + \sin^2(\arccos x) = 1 \quad \forall x \in [-1;1]$

$\underbrace{\textit{donc} \ \sin(\arccos x)}_{\geq 0 \ car \ \arccos x \in [0;\pi]} = \sqrt{1-x^2} \quad \forall x \in [-1;1]$



$f : x \mapsto \tan x$ est une fonction strictement croissante et continue sur I=$]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ à valeur dans J=$\mathbb{R}$ donc f est bijective de I dans J.

Soient $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, y \in \mathbb{R}$ alors

$y = \tan x \Leftrightarrow x = \arctan y$

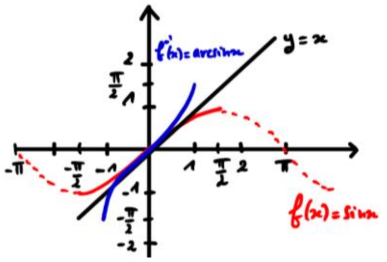
$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

$x \mapsto \arctan x$

arctan(x) est l'angle compris entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ dont la tangente vaut x.

$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}} = 1$

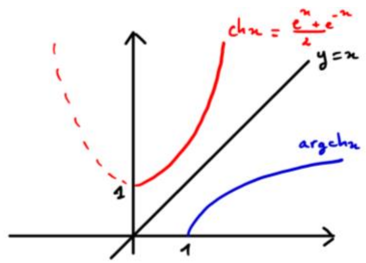
$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \qquad \arctan(0) = 0$



$\sin : \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \to [-1;1]$

$\arcsin : [-1;1] \to \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \qquad \arcsin(0) = 0$

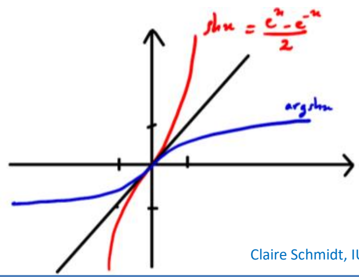


ch : $[0;+\infty[\to [1;+\infty[$

argch: $[1;+\infty[\to [0;+\infty[$

sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

argsh: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Claire Schmidt, IUT de Cachan, GEII1