Formulaire : Transformation de Laplace

Définition de la transformation de Laplace

Soit f une fonction définie lorsque t>0. Sa transformée de Laplace F, lorsqu'elle existe, est définie par :

$$\boxed{f(t)\underset{L}{\rightarrow}F(p)=\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt}$$

Cette formule permet d'obtenir directement **les transformées des fonctions usuelles** suivantes :

$$1\underset{L}{\rightarrow}\frac{1}{p}\ car\ \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt=\left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}=\frac{-1}{p}\left[\underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{-pt}}_{\to 0\ si\ p>0}-1\right]=\frac{1}{p}\ si\ p>0$$

$$t\underset{L}{\rightarrow}\frac{1}{p^2}\ car\ \int_0^{+\infty}\underset{u}{t}\underbrace{e^{-pt}}_{v'}dt=\underbrace{\left[t\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}}_{=0}-\int_0^{+\infty}\frac{e^{-pt}}{-p}dt=\frac{1}{p}\underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-pt}dt}_{=\frac{1}{p}}=\frac{1}{p^2}\ par\ IPP\ si\ p>0$$

et plus généralement, $\boxed{t^n\underset{L}{\rightarrow}\frac{n!}{p^{n+1}}\ si\ p>0}$

Par ailleurs, $\boxed{e^{\omega t}\underset{L}{\rightarrow}\frac{1}{p-\omega}\ si\ p>\mathrm{Re}(\omega)}$

car $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\omega t}e^{-pt}dt=\int_0^{+\infty} e^{(\omega-p)t}dt=\left[\frac{e^{(\omega-p)t}}{(\omega-p)}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{(\omega-p)}\left[\underbrace{\lim_{t\to+\infty} e^{(\omega-p)t}}_{\to 0\ si\ p>\mathrm{Re}(\omega)}-1\right]=\frac{1}{p-\omega}$

Propriétés de la transformation de Laplace

Les propriétés permettent de **calculer les transformées de certaines fonctions sans passer par le calcul d'intégrales** : on les déduit des transformées de fonctions usuelles.

Propriété 1 : Linéarité $\boxed{af(t)+bg(t)\underset{L}{\rightarrow}aF(p)+bG(p)}$

<u>Applications</u> : on peut trouver facilement la transformée de Laplace de polynômes et de fonctions trigonométriques (cost, sint) et hyperboliques (cht, sht).

$$\begin{cases}\cos t=\dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}\underset{L}{\rightarrow}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-j}+\dfrac{1}{p+j}\right)=\dfrac{p}{p^2+1}si\ p>0\\ \sin t=\dfrac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}\underset{L}{\rightarrow}\dfrac{1}{2j}\left(\dfrac{1}{p-j}-\dfrac{1}{p+j}\right)=\dfrac{1}{p^2+1}si\ p>0\\ cht=\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}\underset{L}{\rightarrow}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1}+\dfrac{1}{p+1}\right)=\dfrac{p}{p^2-1}si\ p>1\\ sht=\dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}\underset{L}{\rightarrow}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p-1}-\dfrac{1}{p+1}\right)=\dfrac{1}{p^2-1}si\ p>1\end{cases}$$

Toutes ces transformées découlent de $e^{\omega t}\underset{L}{\rightarrow}\frac{1}{p-\omega}\ si\ p>\mathrm{Re}(\omega)$ *(C'est l'occasion de vérifier que vous connaissez bien vos formules d'Euler et la définition des fonctions hyperboliques cht et sht !)*

Propriété 2: Amplification de la variable $\boxed{f(at) \underset{L}{\rightarrow} \frac{1}{a} F(\frac{p}{a})}$ (a>0)

<u>Conséquences</u> :

$$\begin{cases} \cos at \underset{L}{\rightarrow} \frac{1}{a} \frac{\frac{p}{a}}{\left(\frac{p}{a}\right)^2 + 1} = \frac{p}{p^2+a^2} \; si \;\; p>0 \\ \sin at \underset{L}{\rightarrow} \frac{a}{p^2+a^2} \; si \;\; p>0 \end{cases}$$

On peut de même calculer les transformées de ch(at) et sh(at)
(à faire en exercice)

Propriété 3: Multiplication par $e^{\omega t}$ $\boxed{e^{\omega t} f(t) \underset{L}{\rightarrow} F(p-\omega)}$

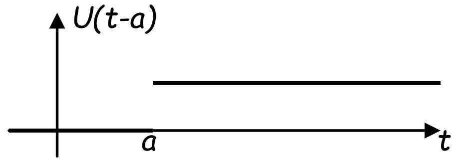
La transformée est « retardée » de ω.
<u>Conséquences</u> :

$$\begin{cases} e^{\omega t} \cos at \underset{L}{\rightarrow} \frac{p-\omega}{(p-\omega)^2+a^2} \; si \;\; p>\omega \\ e^{\omega t} \sin at \underset{L}{\rightarrow} \frac{a}{(p-\omega)^2+a^2} \; si \;\; p>\omega \\ te^{\omega t} \underset{L}{\rightarrow} \frac{1}{(p-\omega)^2} \; si \;\; p>\omega \; car \; t \underset{L}{\rightarrow} \frac{1}{p^2} \end{cases}$$

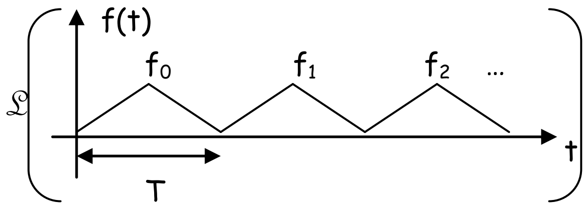
Propriété 4: Théorème du retard $\boxed{f(t-a)U(t-a) \underset{L}{\rightarrow} e^{-ap} F(p)}$

Exemple :

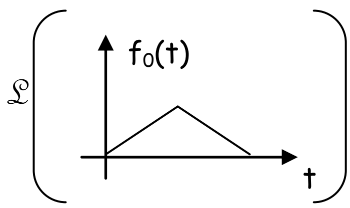
$$U(t-a) \underset{L}{\rightarrow} \frac{e^{-ap}}{p} \; si \;\; p>0$$



Transformée d'une fonction périodique :



=



$1-e^{-pT}$

$si \;\; p>0$

Propriété 5: Dérivation $\boxed{\begin{cases} f'(t) \underset{L}{\rightarrow} pF(p) - f(0) \\ f''(t) \underset{L}{\rightarrow} p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \end{cases}}$

Il faut savoir généraliser avec $f^{(n)}(t)$

Et de manière symétrique : $\boxed{tf(t) \underset{L}{\rightarrow} -F'(p)}$, $\boxed{t^2 f(t) \underset{L}{\rightarrow} F''(p)}$ et $\boxed{t^n f(t) \underset{L}{\rightarrow} (-1)^n F^{(n)}(p)}$

Exemples :

$$\begin{cases} t\cos t \underset{L}{\rightarrow} -\left(\dfrac{p}{p^2+1}\right)' = \dfrac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \\ t^n e^{at} \underset{L}{\rightarrow} (-1)^n \left(\dfrac{1}{p-a}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}} \end{cases}$$

(preuve par récurrence à faire en exercice)

Propriété 6 : Produit de convolution $\boxed{(f*g)(x) \underset{L}{\rightarrow} F(p)\times G(p)}$

On rappelle que $(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt$

<u>Cas particulier</u> : si les deux fonctions sont nulles sur IR⁻ alors $(f*g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt$

Propriétés de la transformation de Laplace inverse

Les propriétés de la transformation de Laplace inverse se déduisent des propriétés de la transformation de Laplace en lisant de la droite vers la gauche.

Voici un récapitulatif des propriétés de la transformation de Laplace et de la transformation de Laplace inverse:

$f(t) \underset{L}{\overset{L^{-1}}{\rightleftarrows}} F(p)$	
$af(t)+bg(t)$	$aF(p)+bG(p)$
$f(t-a)U(t-a)$ $e^{\omega t}f(t)$	$e^{-ap}F(p)$ $F(p-\omega)$
$f'(t)$ $f''(t)$ $tf(t)$	$pF(p)-f(0)$ $p^2F(p)-pf(0)-f'(0)$ $-F'(p)$
$\int_a^t f(x)dx$ $\dfrac{f(t)}{t}$	$\dfrac{F(p)}{p}$ $\int_p^{+\infty} F(u)du$
$f*g$	$F\times G$