2

LOGIQUE

ET

ARITHMETIQUE

S1

Version 1

LOGIQUE ET ARITHMETIQUE

I Raisonnement Logique

1) Méthode de déduction

Il s'agit de partir d'une hypothèse pour aboutir à une conclusion

Ex 1 : Soit $n \in \mathbb{N}$

Démontrer que n est pair si et seulement si n^2 est pair

Autrement dit : n est pair $\Leftrightarrow$ n^2 est pair

Un peu de vocabulaire :

$\Leftrightarrow$ équivalence

$\Rightarrow$ implication

$\Leftarrow$ réciproque

Si n est pair alors n^2 est pair

n est pair $\Rightarrow$ n^2 est pair

n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair

Si n^2 est pair alors n est pair

Pour démontrer une équivalence, il faut démontrer l'implication et la réciproque.

Démontrons l'implication

$(\Rightarrow)$ Si n est pair alors n^2 est pair

$\underbrace{n \text{ est pair}}_{\text{hypothèse}} \Rightarrow \underbrace{n^2 \text{ est pair}}_{\text{conclusion}}$

On suppose que n est pair (hypothèse)

et on démontre que n^2 est pair (conclusion)

par déductions successives

Si n est pair alors $n = 2k$ où $k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^2 = (2k)^2$

$\Rightarrow n^2 = 4k^2$

$\Rightarrow n^2 = 2 \times 2k^2$ est pair

Démontrons la réciproque

$\Rightarrow$

Si n^2 est pair alors n est pair
n^2 est pair $\Rightarrow$ n est pair

On suppose que n^2 est pair (hypothèse)

et on démontre que n est pair (conclusion)

Si n^2 est pair alors $n^2 = 2k$

$\Rightarrow n = \sqrt{2k}$ $\quad n \geq 0$

$\Rightarrow$ la méthode bloque !

2) Méthode par l'absurde

contradiction

On suppose que la conclusion est fausse et on aboutit à une absurdité

On souhaite démontrer que n^2 pair $\Rightarrow$ n pair

hypothèse conclusion

Soit n un entier tel que n^2 est pair (= hypothèse)

On suppose que n est impair $\Rightarrow n = 2k+1$ $\quad k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$= 2(2k^2 + 2k) + 1$ impair

c'est absurde car n^2 est pair

$\Rightarrow$ n est pair

Ex 2 : Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel

On suppose que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ $\quad \sqrt{2} = \frac{p}{q}$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

$\Updownarrow$

Ex 2 : Démontrer par l'absurde que $\sqrt{2}$ est irrationnel $\quad \sqrt{2} > 0$

$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$

$\Updownarrow$

On suppose que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ $\quad p \in \mathbb{N} \quad q \in \mathbb{N}^*$

où p et q n'ont aucun facteur commun (fraction irréductible)

① Montrer que p^2 est pair. $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = \sqrt{2}\, q \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ est pair

② Que peut-on en déduire pour p ? p^2 pair $\Rightarrow$ p pair $\Rightarrow p = 2k \quad k \in \mathbb{N}$

③ Montrer que q^2 est pair. $q^2 = \frac{p^2}{2} = \frac{(2k)^2}{2} = 2k^2 \Rightarrow q^2$ est pair

$\Rightarrow$ q est pair

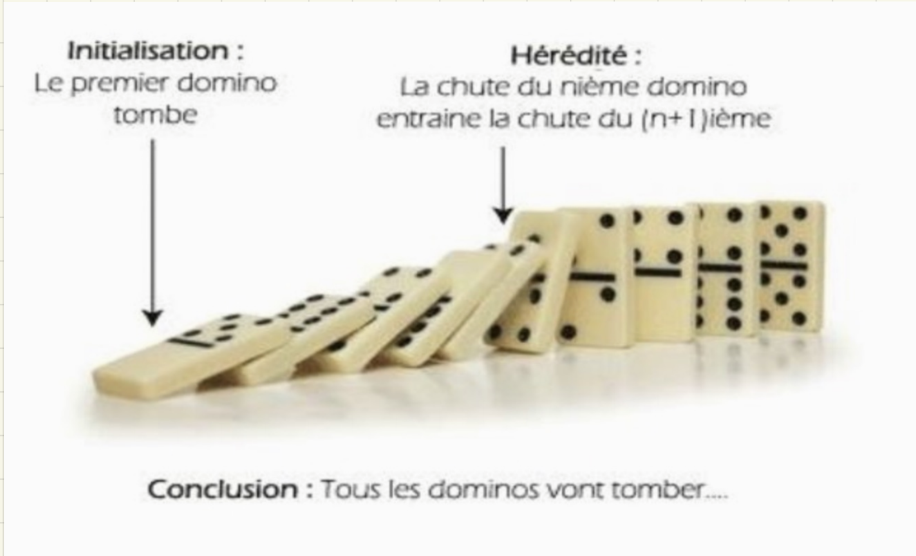
④ Montrer qu'il y a une contradiction. Conclure : p pair & q pair

$\Rightarrow$ C'est absurde car on a supposé qu'ils n'avaient aucun facteur commun.

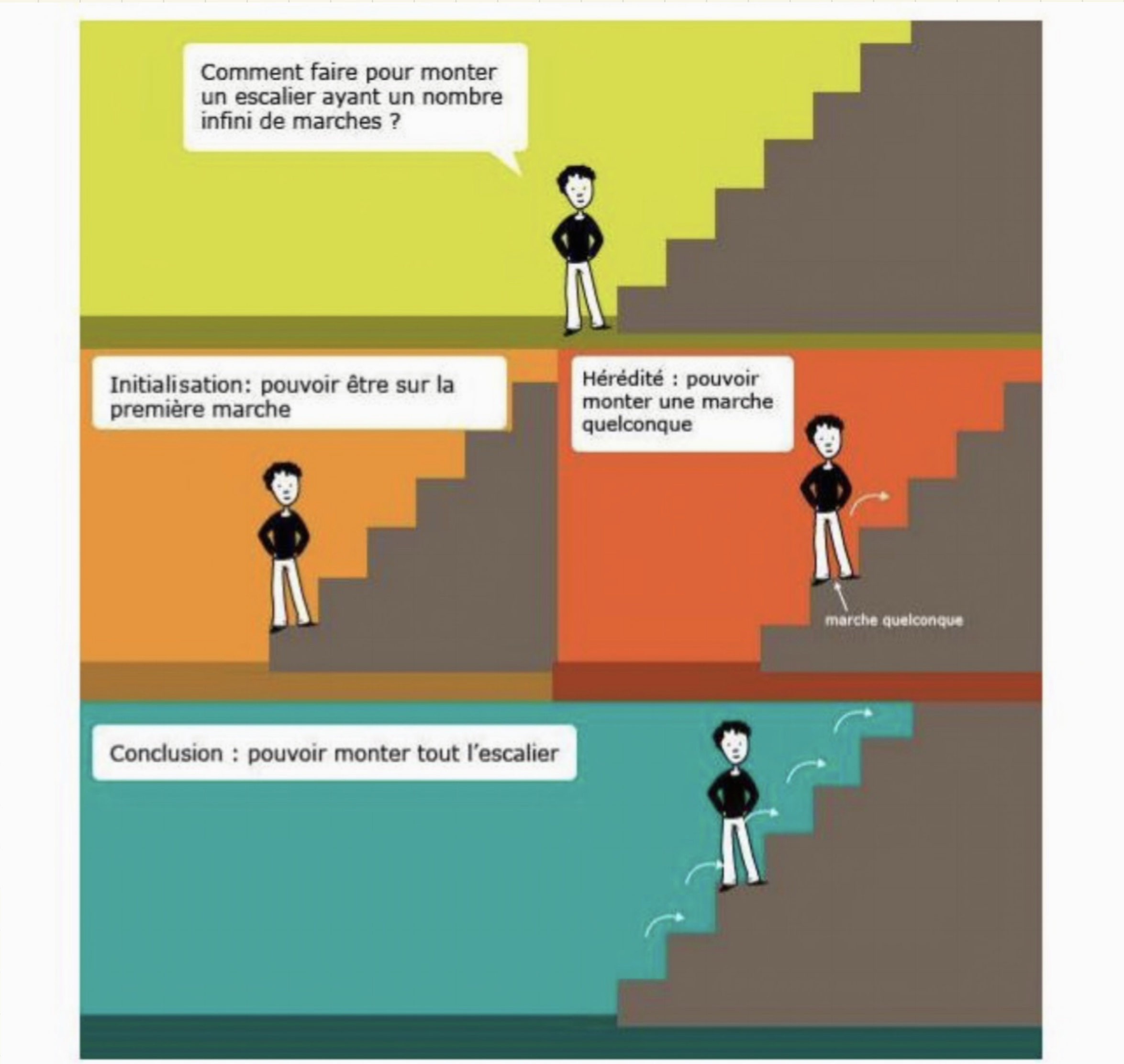
3) Méthode par récurrence

La démonstration par récurrence repose sur le principe très concret suivant :

Si on pousse le 1er domino et que un domino tombant fait tomber le suivant, alors tous les dominos tombent

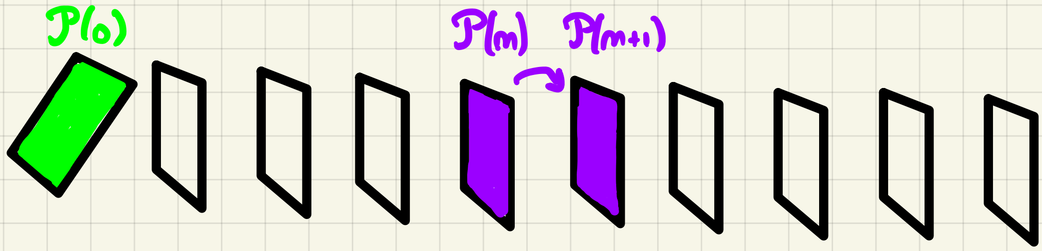


Si une personne se trouve sur la première marche d'un escalier et qu'elle sait monter d'une marche à l'autre alors, elle pourra monter sur n'importe quelle marche



On peut appliquer ce principe à n'importe quelle propriété dépendant d'un entier n, notée $\mathcal{P}(n)$

Si la proposition est vraie au début (pour $n_0 = 0$ ou 1) et qu'elle est héréditaire (si elle vraie au rang n alors elle vraie au rang $n+1$) alors, elle est vraie pour tout $n \geq n_0$.



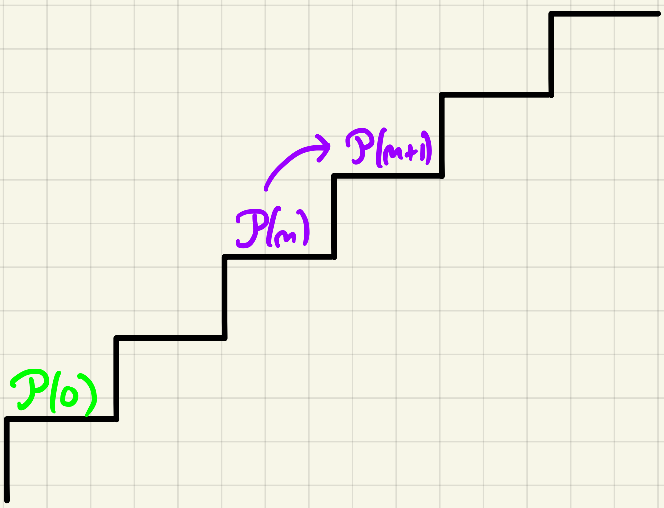
Principe de récurrence : Soit une proposition $\mathcal{P}(n)$

Si $\underbrace{\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}}$ et $\forall n \geq n_0$ $\underbrace{\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)}_{\text{Hérédité}}$, alors $\underbrace{\forall n \geq n_0 \ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}}_{\text{Conclusion}}$.

En effet, par phénomène de cascade, si $\mathcal{P}(0)$ est vraie alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie et donc $\mathcal{P}(2)$ est vrai et ainsi de suite donc $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geq 0$.

Une récurrence se rédige donc en 3 parties :

① Initialisation ② Hérédité ③ conclusion



L'initialisation est simple : il suffit de vérifier que $\mathcal{P}(0)$ (ou $\mathcal{P}(1)$) est vraie

L'hérédité est le plus difficile à démontrer.

C'est pourquoi il faut toujours expliciter $\boxed{\mathcal{P}(n)}$ (hypothèse de récurrence) et $\boxed{\mathcal{P}(n+1)}$ (ce qu'il faut démontrer) clairement.

Exemple 1 : Démontrons par récurrence que $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

On note $P(n) : 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$P(2) : 1+2 = \frac{2\times 3}{2}$ vrai

Initialisation : $P(1) : 1 = \frac{1\times 2}{2}$ c'est vrai

$\cancel{P(2)=3}$

⚠ $\cancel{P(1)=1}$ $P(1)$ = proposition $\neq$ nombre

hypothèse de récurrence

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $P(n) : \boxed{\underbrace{1+2+\dots+n}_{S_n} = \frac{n(n+1)}{2}}$ est vrai

conclusion à démontrer

On veut démontrer $P(n+1) : \underbrace{1+2+\dots+n+(n+1)}_{S_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On part de : $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$S_{n+1} = 1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n+1$

$3 = \frac{3\times 2}{2}$

$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n^2+3n+2}{2}$

or $(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$

donc $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$(n+1)(n+2) = n^2+3n+2$

Pour démontrer

$A = B$

(1) $A = \dots = \dots = \dots = B$

(2) $B = \dots = \dots = A$

(3) $A - B = \dots = 0$

(4) $\frac{A}{B} = 1$ si $B \neq 0$

(5) $A = C$ et $B = C$

$\Rightarrow A = B$

2^e méthode :

$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(n)$ est vrai

$1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemple 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 10u_n + 9$

arithmético-géométrique

On cherche à déterminer u_n en fonction de n

On calcule $u_1 = 10u_0 + 9 = 10\times 5 + 9 = 59 = 60 - 1 = 6\times 10^1 - 1$

$u_2 = 10u_1 + 9 = 10\times 59 + 9 = 599 = 600 - 1 = 6\times 10^2 - 1$

$u_3 = 10u_2 + 9 = 5990 + 9 = 5999 = 6000 - 1 = 6\times 10^3 - 1$

$\Rightarrow$ il semble que $u_n = 6\times 10^n - 1$

ceci est une conjecture, il faut le démontrer !

Démontrons le par récurrence. Soit $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 6\times 10^n - 1$

Initialisation : Déjà fait : u_1, u_2, u_3 conviennent (cf ci-dessus)

Hérédité : Soit $n \geq 1$

On suppose que $\mathcal{P}(n)$: $u_n = 6\times 10^n - 1$ est vrai

On démontre $\mathcal{P}(n+1)$: $u_{n+1} = 6\times 10^{n+1} - 1$

Attention : si on n'utilise pas l'hypothèse de récurrence, ce n'est pas une récurrence !

$u_n = 6\times 10^n - 1$

$u_{n+1} = 10u_n + 9 = 10(6\times 10^n - 1) + 9$

$= 10\times 6\times 10^n - 10 + 9$

$= 6\times 10^{n+1} - 1 \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vrai

$60\times 10^n = 6\times 10^1\times 10^n$

$= 6\times 10^{n+1}$

Conclusion :

$\forall n \geq 1$ $\mathcal{P}(n)$ est vrai $u_n = 6\times 10^n - 1$

Ex 3 : Montrer que n^2+n+2 est pair pour tout entier $n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{P}(n)$: " n^2+n+2 est pair "

TD

- ex 3 du cours
- TD 2

ex 6 (b) (récurrence)

ex 7

ex 8

ex 10

RV 11h Zoom

Initialisation : $n=0$

$\mathcal{P}(0)$: " 2 est pair " VRAI

Hérédité : Soit $n \geq 0$ un entier fixé

On suppose $\mathcal{P}(n)$: " n^2+n+2 est pair " est vrai

On démontre $\mathcal{P}(n+1)$: " $(n+1)^2+n+1+2$ est pair "

$$(n+1)^2+n+1+2 = n^2+2n+1+n+1+2$$

$$= \underbrace{\underbrace{(n^2+n+2)}_{\substack{\text{pair} \\ \text{d'après } \mathcal{P}(n)}} + \underbrace{2n+2}_{\substack{\text{pair (multiple de 2)} \\ 2(n+1)}}}_{\text{pair (somme de 2 nombres pairs)}}$$

$\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ est vrai

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ est vrai

n^2+n+2 est pair

Autre méthode pour démontrer ce résultat ?

2e méthode

$n^2+n = n(n+1)$ on a 2 nombres consécutifs $\rightarrow$ l'un des 2 est pair et l'autre est impair

pair = multiple de 2

pair × impair = pair

$$2k \times (2k'+1) = 2 \times \underbrace{k(2k'+1)}_{=q} = 2q \quad \text{paire}$$

$$\underbrace{n^2+n}_{\text{paire}} + \underbrace{2}_{\text{pair}} \text{ est pair}$$

3e méthode

- Soit n est pair $\Rightarrow$ $n=2k$ $n^2+n+2 = \ldots$
- Soit n est impair $\Rightarrow$ $n=2k+1$ $n^2+n+2 = \ldots$

TD 2

ex 6 (b) Preuve par récurrence $\forall n \geq 1$

$\mathcal{P}(n)$: $1^2+2^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Initialisation : $n=1$

$\mathcal{P}(1)$: $1^2 = \dfrac{1\times 2\times 3}{6}$ est vrai $\qquad \cancel{\mathcal{P}(1)=1}$

$\mathcal{P}(2)$: $\underbrace{1^2+2^2}_{=5} = \underbrace{\dfrac{2\times 3\times 5}{6}}_{=5}$ est vrai $\qquad \cancel{\mathcal{P}(2)=5}$

Hérédité :

$2(n+1)+1 = 2n+3$

on suppose que $\mathcal{P}(n)$: $1^2+2^2+\dots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vrai

on démontre $\mathcal{P}(n+1)$: $1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$

$$1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$$
$$= \dots$$
$$= \dots$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

A terminer

TD 2
- ex 5 (b), (c) récurrence
- ex 7, 8, 10, 11 suites

pour vendredi

ex 5

c) Démontrer par récurrence que $\forall n \in IN$, $4^n + 15n - 1$ est un multiple de 9

$P(n)$: " $4^n + 15n - 1$ est multiple de 9 "

(I) $n = 0$ $\quad 4^0 + 15 \times 0 - 1 = 1 + 0 - 1 = 0 = 0 \times 9$ est un multiple de 9

$P(0)$ est vrai

(H) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$? $\quad P(n+1)$: " $4^{n+1} + 15(n+1) - 1$ est multiple de 9 "

$$4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 4 \times 4^n + 15n + 15 - 1$$

$$= \underbrace{4(4^n + 15n - 1) - 4 \times 15n + 4}_{= 4 \times 4^n} + 15n + 15 - 1$$

$$= 4\,(4^n + 15n - 1) - 45n + 18 \quad \text{est un multiple de } 9$$

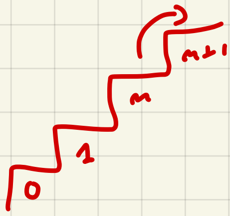
$4^n + 15n - 1$: multiple de 9 ; $45n = 9 \times 5$; $18 = 9 \times 2$

$P(n+1)$ est vrai

(C) $\forall n \in IN$ $P(n)$ est vrai

ex 6

e) $2^n > n \qquad \forall\, n \geq 0$



$P(n)$: $2^n > n$

(I) $n = 0 \qquad 2^0 = 1 > 0$ VRAI donc $P(0)$ est vrai

$n = 1 \qquad 2^1 = 2 > 1$ VRAI donc $P(1)$ est vrai

(H) n fixé, $n \geq 1$

$P(n) \Rightarrow P(n+1) \qquad P(n+1)$: $2^{n+1} > n+1 \qquad 2^{n+1} = 2^n \times 2$

$2n - (n+1) = n - 1 \geq 0$ si $n \geq 1$

$$2^n > n \Rightarrow \underbrace{2 \times 2^n}_{= 2^{n+1}} > 2n \underset{?}{\geq} n+1$$

$2n \geq n+1$?

$\Leftrightarrow 2n - n \geq 1$

$\Leftrightarrow n \geq 1$ VRAI

$\Rightarrow 2^{n+1} > n+1$

$\Rightarrow P(n+1)$ est vrai

(C) $\forall n \in IN \qquad P(n)$ est vrai

Exercice 11

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$$

a) Déterminer S_1, S_2 et S_3.

b) Montrer que : $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

c) En déduire une simplification de S_n. Vérifier que les résultats obtenus à la question a) sont logiques.

a) $S_1 = \frac{1}{2}$ $\qquad S_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Remarque — on dirait que $S_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad S_1 = \frac{1}{2} \quad S_2 = \frac{2}{3} \quad S_3 = \frac{3}{4}$

Ex typique de DS : Montrer que $S_n = \frac{n}{n+1}$ par récurrence

b) $\underbrace{\frac{1}{k(k+1)}}_{A} = \underbrace{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}_{B}$? $\qquad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$

$A = B$ $\qquad A = \ldots = B$

$B = \ldots = A$

$\left.\begin{array}{l} A = C \\ B = C \end{array}\right\} A = B$

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ $\qquad \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}$

$S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$

$S_n = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$

4) Quelques notations

$\mathbb{R} \setminus \{2\}$

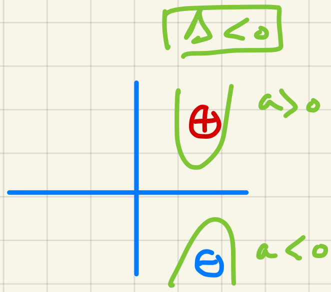
Quantificateurs : $\forall$ pour tout

$\exists$ il existe

Notation : $/$ tel que

Ex 1 : On considère la proposition suivante :

Pour tout x réel , $x^2 + 2x + 3 \geq 0$



① Ecrire la proposition à l'aide de quantificateurs

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 2x + 3 \geq 0$

② La proposition est-elle vraie ?

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 = -8 < 0$ pas de racine

$\Rightarrow x^2 + 2x + 3$ est du signe de $a = 1$ $\Rightarrow x^2 + 2x + 3 > 0$ $\Rightarrow$ VRAI

③ Donner la négation de la proposition

$\exists x \in \mathbb{R} \; / \; x^2 + 2x + 3 < 0$

Il existe un réel x tel que $x^2 + 2x + 3 < 0$ $\Rightarrow$ FAUX

À retenir :

une proposition est VRAIE si et seulement si sa négation est FAUSSE

une proposition est FAUSSE si et seulement si sa négation est VRAIE

Conséquence :

Prouver qu'une proposition est VRAIE revient à démontrer que sa négation est FAUSSE.

Ex 1 : On considère la proposition suivante :

Il existe un entier y tel que $-y^2 + 2y + 3 \geqslant 0$

① Ecrire la proposition à l'aide de quantificateurs

$\exists y \in \mathbb{Z} \,/\, -y^2 + 2y + 3 \geqslant 0$

② La proposition est-elle vraie ? VRAI

$y = 0 \qquad -0^2 + 2 \times 0 + 3 = 3 \geqslant 0$

③ Donner la négation de la proposition

$\forall y \in \mathbb{Z} \quad -y^2 + 2y + 3 < 0$ FAUX

II Arithmétique

on se place dans $\mathbb{N}$

1) Nombres premiers

Définition : Soient $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{N}$

On dit que a est un multiple de b s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $a = kb$

$\Leftrightarrow$ b est un diviseur de a

$\Leftrightarrow$ b divise a

ex 1 :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
diviseurs de n	$\mathbb{N}$	1	1, 2	1, 3	1, 2, 4	1, 5	1, 2, 3, 6	1, 7

$0 = 0 \times n$

Définition: On dit que n est un nombre premier s'il admet exactement deux diviseurs (1 et n).

Nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29 etc...

Propriété : Tout entier s'écrit comme produit de nombres premiers

ex 2 : $240 = 24 \times 10 = 6 \times 4 \times 2 \times 5 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 3 \times 5$

2) Critères de divisibilité :

$9 \times 6 = 3 \times 18$

$162 = 3 \times 54$

$1 + 6 + 2 = 9$ multiple de 3

par 2 : le dernier chiffre est pair

par 3 : la somme des chiffres est un multiple de 3

par 5 : le dernier chiffre est 0 ou 5

par 9 : la somme des chiffres est un multiple de 9 $\qquad 162 = 9 \times 18$

par 10 : le dernier chiffre est 0

ex : 1155 est multiple de 3 et de 5

3) PGCD, PPCM

$$\begin{array}{r|l} 504 & 9 \\ -45 & 56 \\ 54 & \end{array}$$

$504 = 9 \times 56$

ex 1 : Décomposer en produit de facteurs premiers

$504 = 2 \times 252 = 2 \times 2 \times 126 = 2 \times 2 \times 2 \times 63 = 2 \times 2 \times 2 \times 7 \times \underbrace{9}_{3^2}$

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7$

$300 = 3 \times 100 = 3 \times 10^2 = 3 \times (2 \times 5)^2 = 3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^2 \times 3 \times 5^2$

$\frac{504}{300} = \frac{12 \times 42}{12 \times 25} = \frac{42}{25}$

PGCD = Plus Grand Commun Diviseur

$PGCD(504, 300) = 2^2 \times 3 = 12$

$504 = 12 \times 2 \times 3 \times 7 = 12 \times 42$

$300 = 12 \times 5^2 = 12 \times 25$

Le PGCD est égal au produit des nombres premiers en commun avec le + petit exposant

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 3 \\ \hline 126 \end{array}$$

PPCM = Plus Petit Commun Multiple

$PPCM(504, 300) = \underbrace{2^3 \times 3^2 \times 7}_{504} \times 5^2 = 504 \times 25 = 300 \times 42 = 12600$

Le PPCM est égal au produit de tous les nombres premiers présents avec le + grand exposant

$$\begin{array}{r} 42 \\ \times\ 15 \\ \hline 210 \\ 420 \\ \hline 630 \end{array}$$

ex 2 : $450 = 45 \times 10 = 9 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5^2$

$420 = 42 \times 10 = 6 \times 7 \times 2 \times 5 = 2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

$PGCD(450, 420) = 2 \times 3 \times 5 = 30 \Rightarrow 450 = 30 \times 15$ et $420 = 30 \times 14$

$PPCM(450, 420) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 420 \times 15 = 450 \times 14 = 6300$

ex 3 : Simplifier en déterminant le dénominateur commun "optimal".

$$\frac{5}{18} - \frac{2}{15} = \frac{5 \times 5}{18 \times 5} - \frac{2 \times 6}{15 \times 6} = \frac{25}{90} - \frac{12}{90} = \frac{13}{90}$$

$18 = 9 \times 2 = 2 \times 3^2$

$15 = 3 \times 5$

$PPCM(18, 15) = 2 \times 3^2 \times 5 = 18 \times 5 = 15 \times 6 = 90$

ex 4 Déterminer le PGCD et le PPCM de 42 et 98

$42 = 6 \times 7 = 2 \times 3 \times 7$

$98 = 2 \times 49 = 2 \times 7^2$

$PGCD(42, 98) = 2 \times 7 = 14$

$42 = 14 \times 3$ $\quad$ $98 = 14 \times 7$

$PPCM(42, 98) = 2 \times 3 \times 7^2 = 42 \times 7 = 98 \times 3 = 294$

Simplifier sans calculatrice (⚠ la calculatrice n'est pas autorisée au DS)

$$\frac{42}{98} = \frac{14 \times 3}{14 \times 7} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{5}{42} - \frac{1}{98} = \frac{5 \times 7}{42 \times 7} - \frac{1 \times 3}{98 \times 3} = \frac{35 - 3}{294} = \frac{32}{294} = \frac{16}{147}$$

4) Théorème de la division euclidienne

Si on prend deux entiers a et b, on peut toujours diviser a par b

$a = bq + r$ avec $q =$ quotient et $0 \leq r < b$

$r =$ reste

ex 1 : Pour la division euclidienne de $a = 21$ par $b = 15$

$21 = 15 \times 1 + 6$

$15 = 6 \times 2 + 3$

$6 = 3 \times 2 + 0$

on continue les divisions successives pour obtenir le PGCD de 21 et de 15

PGCD = dernier reste non nul = 3

$PGCD(21, 15) = 3$

ex 2 : À l'aide de divisions euclidiennes successives, retrouver le PGCD de 98 et 42

$98 = 42 \times 2 + 14$

$42 = 14 \times 3 + 0$

$PGCD = 14$

Pour la prochaine fois :

TD2

ex 11 : Montrer par récurrence que $S_n = \frac{n}{n+1}$

ex 14

ex 15

Remarque : $PGCD(a,b) \times PPCM(a,b) = a \times b$

5) Notion de modulo

Rappel : $\theta = \frac{\pi}{6} \, [2\pi] \iff \theta =$

a) Entiers égaux modulo 2 :

Définition : on dit que a est égal à b modulo 2 et on note $a \equiv b \, [2]$ si et seulement si $a =$

Ex : $a \equiv 0 \, [2] \iff a =$

$a \equiv 1 \, [2] \iff a =$

On obtient ainsi deux catégories de nombres :

$\dot{0} =$

$\dot{1} =$

Addition :

+	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{0}$		
$\dot{1}$		

Multiplication :

$\times$	$\dot{0}$	$\dot{1}$
$\dot{0}$		
$\dot{1}$		

b) Entiers égaux modulo 3 :

Définition : on dit que a est égal à b modulo 3 et on note $a = b\ [3]$ si et seulement si $a =$

Ex : $a = 0\ [3] \iff a =$

$a = 1\ [3] \iff a =$

$a = 2\ [3] \iff a =$

On obtient ainsi trois catégories de nombres :

$\dot{0} =$

$\dot{1} =$

$\dot{2} =$

Addition :

$+$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$			
$\dot{1}$			
$\dot{2}$			

Multiplication :

$\times$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$
$\dot{0}$			
$\dot{1}$			
$\dot{2}$			

c) Entiers égaux modulo n $\quad (n \in \mathbb{N})$

Définition : on dit que a est égal à b modulo n et on note $a \equiv b\ [n]$ si et seulement si $a =$

$\dot{0} =$

$\dot{1} =$

$\dot{2} =$

$\vdots$

Ex d'application : Si $n = 7$

$\dot{0}$ = lundi
$\dot{1}$ = mardi
$\vdots$
$\dot{7}$ = dimanche

cela permet de travailler sur les jours de la semaine

$\longrightarrow$ utile en programmation (GL)

III Combinatoire

1) Notion de Factorielle

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ alors $n! =$

De plus, $0! =$

Premières valeurs :

$0! =$ $\qquad$ $3! =$

$1! =$ $\qquad$ $4! =$

$2! =$ $\qquad$ $5! =$

Propriété : $(n+1)! =$

preuve :

Ex 1 : Simplifier :

$$\frac{6!}{4!} =$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} =$$

$$\frac{(n!)^2}{(n-2)!\,(n+2)!} =$$

$$\frac{(2n)!}{\big(2(n+1)\big)!} =$$

2) Généralisation des identités remarquables :

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$n=0$	1			
$n=1$	1	1		
$n=2$	1	2	1	
$n=3$	1	3	3	1

En ne retenant que les coefficients, on obtient le triangle de Pascal

	$k=0$	1	2	3				
$n=0$	1							
$n=1$	1	1						
$n=2$	1	2	1					
$n=3$	1	3	3	1				
$n=4$	1	4	6	4	1			
$n=5$	1	5	10	10	5	1		
$n=6$	1	6	15	20	15	6	1	
$n=7$	1	7	21	35	35	21	7	1

$1+2=3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

Ex1: Compléter le triangle de Pascal jusqu'à la ligne 7 puis développer $(a+b)^7$

$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$

Ex2: Calculer $(2+x)^3 + (2-x)^3$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = (a+(-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ Signes alternés

$(2+x)^3 = 2^3 + \cancel{3\times 2^2 x} + 3\times 2x^2 + \cancel{x^3}$

(+) $(2-x)^3 = 2^3 - \cancel{3\times 2^2 x} + 3\times 2x^2 - \cancel{x^3}$

$(2+x)^3 + (2-x)^3 = 16 + 12x^2$

Le terme à l'intersection de la n^e ligne et de la k^e colonne est noté C_n^k

⚠ La numérotation démarre à 0

Par exemple, $C_6^2 = 15$

ex 1 : Déterminer $C_5^1 = 5$

$C_4^3 = 4$

	k=0	k=1	k=2	k=3	k=4	k=5	k=6		k=n
n=0	1								
n=1	1	1							
n=2	1	2	1						
n=3	1	3	3	1					
n=4	1	4	6	4	1				
n=5	1	5	10	10	5	1			
n=6	1	6	15	20	15	6	1		
⋮									
n	C_n^0	C_n^1	C_n^2	C_n^k	......	C_n^{n-1}	C_n^n		

C_6^2

$C_n^k = \binom{n}{k}$

écriture française ↑ ↑ écriture anglaise

$C_6^0 = \binom{6}{0} = 1$

ex 2 : Ecrire la ligne n du triangle de Pascal à l'aide des C_n^k

En déduire

$$(a+b)^n = \underbrace{C_n^0}_{=1} a^n + \underbrace{C_n^1}_{=n} a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + \underbrace{C_n^n}_{=1} b^n$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k}$$

binôme de Newton

Propriété (admis) : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

ex 1. $C_6^2 = \dfrac{6!}{2!\,4!} = \dfrac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times1\times2\times3\times4} = \dfrac{5\times6}{2} = \dfrac{30}{2} = 15$

$C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\,(5-3)!} = \dfrac{5!}{3!\,2!} = \dfrac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times1\times2} = \dfrac{4\times5}{2} = 10$

$C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\,2!} = \dfrac{3\times4}{2} = 6$

ex 2 :

$$C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \qquad 0! = 1$$

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{\cancel{1\times 2\times 3\times \dots \times (n-1)}\times n}{1\cancel{\times 2\times 3\times \dots \times (n-1)}} = n$$

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$C_n^n = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$C_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-(n-1))!} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = n$$

Ex 3 : Calculer $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$

$$C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-1-k)!}$$

$$= \frac{k\,(n-1)!}{k!\,(n-k)!} + \frac{(n-k)(n-1)!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,(k+n-k)}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)!\,n}{k!\,(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$$= C_n^k$$

$(n-1-k)! = (n-k-1)!$

$(n-k)! = (n-k-1)! \times (n-k)$

$n! = (n-1)! \times n$

1 1

1 $\boxed{2+1}$

1 3 $\boxed{3}$ 1

⋮

ligne n-1 $\quad \boxed{C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}}$

ligne n $\quad C_n^0 \; C_n^1 \; \dots \; \boxed{C_n^k}$

Exercice 17

Simplifier :

$$A = \frac{7!}{5!} \qquad B = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} \qquad C = \frac{[2(n+1)]!}{(2n)!} \qquad D = \frac{(n!)^2}{(n-1)!(n+1)!}$$

Exercice 18

Exprimer à l'aide de factorielles

$$A = 2.4.6.8.10 \qquad B = 10.\ 9.\ 8. \qquad C = \frac{9.7.5.3}{8.6.4.2} \qquad D = n(n-3)(n-1)(n-2)$$

ex17 $A = 7 \times 6 = 42$ $\quad B = n(n+1)$ $\quad C = (2n+1)(2n+2)$

$$D = \frac{n!}{(n-1)!}\,\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n}{n+1}$$

ex18 $A = 2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 = 2 \times 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 4 \times 2 \times 5 = 2^5 \times 5!$

$$B = 10 \times 9 \times 8 = \frac{10!}{7!}$$

$C = ?$ inspirez-vous de A

$$D = n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{n!}{(n-4)!}$$

$$\frac{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-4) \times (n-3)(n-2)(n-1)n}{1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-4)}$$

Exercice 19

Démontrer : 1) $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} = \frac{n(n-1)}{p(p-1)} C_{n-2}^{p-2}$ 2) $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

Exercice 20 :

Extrait de DS

1/ Calculer $\frac{9!}{7!}$ et $\frac{n!}{(n+2)!}$

2/ Grâce au binôme de Newton, donner le développement de l'expression $(A+B)^8$

3/ En déduire le coefficient de $a^3b^3c^2$ dans le développement de l'expression $(a+b+c)^8$

ex 20

$$\frac{9!}{7!} = 8 \times 9 = 72$$

$$\frac{n!}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$n=0$	1
$n=1$	1 1
$n=2$	1 + 2 1
$n=3$	1 3 3 1
$n=4$	1 4 6 4 1
$n=5$	1 5 10 10 5 1
$n=6$	1 6 15 20 15 6 1
$n=7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n=8$	1 8 28 56 70 56 28 8 1

$$(A+B)^8 = A^8 + 8A^7B + 28A^6B^2 + 56A^5B^3 + 70A^4B^4 + 56A^3B^5 + 28A^2B^6 + 8AB^7 + B^8$$

$(a+b+c)^8$ coeff de $a^3b^3c^2$

$$(\underbrace{(a+b)}_{A} + \underbrace{c}_{B})^8 = (a+b)^8 + 8(a+b)^7c + 28\underbrace{(a+b)^6c^2}_{} + \dots + c^8$$

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + \dots + b^6$$

$$\text{coeff de } a^3b^3c^2 = 28 \times 20 = 560$$