1

MATHS ELEMENTAIRES

S1

Version 1

Exercice 4

Résoudre avec un minimum de calculs les équations suivantes

a. $\frac{1}{7}=\frac{2x}{21}$ b. $\frac{3}{4}=\frac{6}{x}$ c. $\frac{13}{-6}=\frac{-x}{9}$

Exercice 4bis

Calculer le plus simplement possible :

a. $A=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ b. $B=\frac{5}{12}+\frac{2}{15}$ c. $C=\frac{7}{300}+\frac{11}{840}$

Exercice 5

Calculer le plus simplement possible :

$$A=\frac{(-25)^2\times(-2)^5\times\sqrt{\frac{5\times(-15)^3}{-10^6}}}{\sqrt{27}}$$

$$B=\frac{\sqrt{7-2\sqrt{6}}\times\sqrt{7+2\sqrt{6}}}{\left(-2\sqrt{2}\right)^4}$$

Ex4

(a) $\frac{1}{7}=\frac{2x}{21} \iff 2x=\frac{21}{7} \iff x=\frac{21}{2\times 7}=\frac{3\times\cancel{7}}{2\times\cancel{7}}=\frac{3}{2}$

(b) $\frac{3}{4}=\frac{6}{x} \iff x=\frac{6\times 4}{3}=8$

(c) $\frac{13}{-6}=\frac{-x}{9} \iff x=\frac{\overset{\cancel{3}\times 3}{9}\times 13}{\underset{\cancel{3}\times 2}{6}}=\frac{3\times 13}{2}=\frac{39}{2}$

Ex 4bis

$A=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{4}{12}+\frac{3}{12}=\frac{7}{12}$

$B=\frac{5}{12}+\frac{2}{15}=\frac{5\times 5}{60}+\frac{2\times 4}{60}=\frac{33}{60}=\frac{11}{20}$

$12=\underline{3}\times 4$ $15=\underline{3}\times 5$ $D=3\times 4\times 5=60=12\times 5=15\times 4$

PPCM = Plus Petit Commun Multiple

$$C = \frac{7}{300} + \frac{11}{840}$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 3 \\ \hline 24 & 28 \\ 0 & \end{array}$$

$8+4=12$
est divisible par 3

$300 = 30 \times 10 \qquad 840 = 84 \times 10$

$300 = 3 \times 10 \times 10 \qquad 840 = 3 \times 28 \times 10$

$300 = \underline{30} \times 10 \qquad 840 = \underline{30} \times 28$

$300 = 30 \times 2 \times 5 \qquad 840 = 30 \times 2 \times 14$

$300 = \underline{60} \times 5 \qquad 840 = \underline{60} \times 14$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times \quad 3 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\text{PPCM}(300, 840) = D = 60 \times 5 \times 14 = \underbrace{300 \times 14}_{=4200} = 840 \times 5$$

$1+5+3=9$

$$C = \frac{7}{300} + \frac{11}{840} = \frac{14 \times 7}{4200} + \frac{5 \times 11}{4200} = \frac{98+55}{4200} = \frac{153}{4200}$$

$4+2=6$

$$C = \frac{51 \times \cancel{3}}{1400 \times \cancel{3}} = \frac{51}{1400}$$

$$\begin{array}{r|l} 51 & 3 \\ \hline 21 & 17 \\ 0 & \end{array}$$

Exs

$$A = \frac{(\overset{\oplus}{-}25)^2 \times (\overset{\ominus}{-}2)^5 \times \sqrt{\dfrac{5 \times (\overset{\ominus}{-}15)^3}{-10^6 \ominus}}}{\sqrt{27}}$$

$$A = - \frac{25^2 \times 2^5 \times \sqrt{\dfrac{5 \times 15^3}{10^6}}}{\sqrt{27}}$$

Simplifier les signes

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3} = 3\sqrt{3}$$

$$25^2 = (5^2)^2 = 5^4$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$10^6 = (10^3)^2 \Rightarrow \sqrt{10^6} = 10^3$$

$$15^3 = (5 \times 3)^3 = 5^3 \times 3^3$$

$$\sqrt{\frac{5\times15^3}{10^6}} = \frac{\sqrt{5\times15^3}}{\sqrt{10^6}} \qquad 5^4=(5^2)^2 \qquad 3^3 = 3^2\times3$$

$$= \frac{\sqrt{5\times5^3\times3^3}}{10^3} = \frac{\sqrt{5^4\times3^3}}{10^3} = \frac{5^2\sqrt{3^3}}{10^3} = \frac{5^2\times3\sqrt{3}}{10^3}$$

$$A = -\frac{25^2\times2^5\times\sqrt{\frac{5\times15^3}{10^6}}}{\sqrt{27}} = -\frac{5^4\times2^5\times\frac{5^2\times\cancel{3\sqrt{3}}}{10^3}}{\cancel{3\sqrt{3}}}$$

$$A = -\frac{5^4\times2^5\times5^2}{10^3} = -\frac{5^6\times2^5}{(5\times2)^3} = -\frac{5^6\times2^5}{5^3\times2^3}$$

$$A = -5^{6-3}\times2^{5-3} = -5^3\times2^2 = -125\times4 = \boxed{-500}$$

$$5^3 = 5^2\times5 = 25\times5 = 125$$

$$B = \frac{\sqrt{7-2\sqrt{6}}\times\sqrt{7+2\sqrt{6}}}{\left(-2\sqrt{2}\right)^4}$$

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

$$(a-b)(a+b) = a^2-b^2$$

$$B = \frac{\sqrt{(7-2\sqrt{6})(7+2\sqrt{6})}}{(-2\sqrt{2})^4} = \frac{\sqrt{7^2-(2\sqrt{6})^2}}{64} = \frac{\sqrt{49-4\times6}}{64}$$

+

$$(\sqrt{2})^4 = \overbrace{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}^{2}\times\overbrace{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}^{2} = 4$$

$$B = \frac{\sqrt{49-24}}{64}$$

$$\boxed{B = \frac{5}{64}}$$

$$(a\times b)^n = a^n\times b^n$$

$$(2\sqrt{2})^4 = 2^4\times(\sqrt{2})^4 = 16\times4 = 64$$

$$\sqrt{2} = 2^{1/2} \qquad (\sqrt{2})^4 = (2^{1/2})^4 = 2^2$$

MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES

I Les ensembles de nombres $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

Les entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

Les entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Les nombres décimaux $\mathbb{D}$ $\quad 1,1 \in \mathbb{D} \quad 5,126 \in \mathbb{D} \quad -5,4 \in \mathbb{D}$

↳ Nombre fini de chiffres après la virgule

Les nombres rationnels $\mathbb{Q}$ $\quad \frac{5}{6} \in \mathbb{Q} \quad \frac{5}{6} = 0,8333\dots$

↳ quotient d'entier $\frac{m}{p}$ $\quad -1,1 = \frac{-11}{10} \in \mathbb{Q}$

Exemple 1: Soit le nombre $x = 21,\underline{54}\,\underline{54}\,\underline{54}\dots$

Montrer que $x \in \mathbb{Q}$

Indication : on pourra commencer par calculer $100x$ puis $99x$

$$\begin{array}{rl} & 100x = 2154,545454\dots \\ \ominus & \quad\; x = 21,545454\dots \\ \hline & 99x = 100x - x = 2154 - 21 = 2133 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2133}{99} = \frac{711}{33} = \frac{237}{11} \in \mathbb{Q}$$

$$\begin{array}{r|l} 2133 & 3 \\ 33 & 711 \\ 0 & \end{array}$$

Exemple 2: Soit $x = 6,\underline{131}\,\underline{131}\,\underline{131}\dots$ Montrer que $x \in \mathbb{Q}$

$$\begin{array}{rl} & 1000x = 6131,131131131\dots \\ \ominus & \qquad x = 6,131131131\dots \\ \hline & 999x = 1000x - x = 6131 - 6 = 6125 \end{array}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6125}{999} \in \mathbb{Q}$$

Les nombres réels $\mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\pi = 3{,}14159265\ldots$

$\sqrt{2} = 1{,}414213562\ldots$

II Manipulation de puissances

Si $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$

alors $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ termes}}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times \ldots \times a}$

le nombre qui, mis au carré, donne a

Si de plus $a > 0$ alors on note $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

le nombre, qui, mis à la puissance n donne a

$8^{\frac{1}{3}}$

Exemple : $\sqrt[3]{8} = 2$ car $8 = 2^3$

$\sqrt[3]{27} = 3$ car $27 = 3^3$

$\sqrt[4]{16} = 2$ car $16 = 2^4$

Si $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(q \neq 0)$ alors $a^r = a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(a^p\right)^{\frac{1}{q}}$

$p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^*$

<u>propriétés</u> : Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Q}$, $r' \in \mathbb{Q}$

$$\boxed{\begin{array}{ll} a^r \times a^{r'} = a^{r+r'} & \dfrac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'} \\ (a^r)^{r'} = a^{rr'} & \\ (ab)^r = a^r \times b^r & \end{array}}$$

$2^5 \times 2^4 = 2^9$

$(3^2)^5 = 3^{10}$

<u>Ex</u> : Simplifier $\dfrac{\sqrt{a}}{a} a^{1/3} = \dfrac{a^{1/2}}{a} a^{1/3} = \dfrac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}{a} = \dfrac{a^{5/6}}{a^1} = a^{\frac{5}{6}-1}$

$a > 0$ $= a^{-1/6}$

$\dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3$

<u>Identités remarquables</u> :

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$9x^2 - 4 = (3x-2)(3x+2)$

<u>Ex</u> : ① Calculer $(-\omega + 3p)(\omega + 3p) = (3p - \omega)(3p + \omega)$

$= (3p)^2 - \omega^2 = 9p^2 - \omega^2$

② Ecrire sans radicaux (racine) au dénominateur :

$A = \dfrac{1}{\sqrt{5} - 3} = \dfrac{1}{\sqrt{5} - 3} \times \dfrac{\sqrt{5}+3}{\sqrt{5}+3} = \dfrac{\sqrt{5}+3}{5 - 9} = \dfrac{\sqrt{5}+3}{-4}$

$A = -\dfrac{\sqrt{5}+3}{4}$

TD ex 5 C.D, ex 10, ex 10bis

⚠ $(-2)^4 > 0$ $\quad -2^4 < 0$

ex 5 :

$$C = \frac{(-3)^2.(-15^3).(-2^4)}{(-6)^2.(-10^2)}$$

$$D = 5\sqrt{27} + \sqrt{3} - 7\sqrt{12}$$

$$C = -\frac{3^2 \times 15^3 \times 2^4}{6^2 \times 10^2} = -\frac{3^2 \times (3\times5)^3 \times 2^4}{(2\times3)^2 \times (2\times5)^2}$$

$(3\times5)^3 = 3^3 \times 5^3$

$$C = -\frac{3^2 \times 3^3 \times 5^3 \times 2^4}{2^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 5^2} = -3^3 \times 5 = -27 \times 5 = -135$$

$$D = 5\sqrt{27} + \sqrt{3} - 7\sqrt{12}$$

$$D = 5\sqrt{9\times3} + \sqrt{3} - 7\sqrt{4\times3}$$

$$D = 5\times3\sqrt{3} + \sqrt{3} - 7\times2\sqrt{3} = 15\sqrt{3} + \sqrt{3} - 14\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Exercice 10

Écrire sans racine carrée au dénominateur les fractions suivantes

a. $A=\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ b. $B=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ c. $C=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}}$

pour vendredi
ex 10 b c
ex 10 bis $\boxed{B}$

Exercice 10 bis

Simplifier :

$A=\dfrac{2}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$ $B=\dfrac{10^2\times 9\sqrt{50}}{\sqrt{200\times 3^2}}$ $C=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}$ $D=\ln(x^4)-3\ln(x)$

ex 10 :

$$A=\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{2\sqrt{2}+2-2-\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-1^2}=\frac{\sqrt{2}}{2-1}=\sqrt{2}$$

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$$

ex 10 bis

$$A=\frac{2}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\frac{2}{2+\frac{1}{\frac{4}{3}}}=\frac{2}{2+\frac{3}{4}}$$

$$A=\frac{2}{\frac{8}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\frac{11}{4}}=2\times\frac{4}{11}=\frac{8}{11}$$

$$C=\frac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-3-4+2\sqrt{3}}{2^2-\sqrt{3}^2}$$

$$C=\frac{4\sqrt{3}-7}{4-3}=4\sqrt{3}-7$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b \qquad \ln\left(\frac{1}{b}\right)=-\ln b$$

$$\ln(x^4)-\ln(x^3)=\ln\left(\frac{x^4}{x^3}\right)=\ln x$$

$$D=\ln(x^4)-\underbrace{3\ln x}_{=\ln(x^3)}=4\ln x-3\ln x=\ln x$$

Simplifier $2\ln x-\underbrace{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}_{=-\ln x}=3\ln x$

$$\ln(a\times b)=\ln a+\ln b$$

$$\ln(a\times a)=\ln a+\ln a \Rightarrow \ln(a^2)=2\ln a$$

$$\ln(a^n)=\ln(\underbrace{a\times a\times\ldots\times a}_{n\text{ termes}})=\underbrace{\ln a+\ln a+\ldots+\ln a}_{n\text{ termes}}=n\ln a$$

III Manipulation d'inégalités

Opérations portant sur 1 inégalité :

$a \leq b$ signifie que $b - a \geq 0$

Soient a, b, c des nombres réels

Si $a \leq b$ alors

AJOUTER	① $a + c \leq b + c$	
SOUSTRAIRE	② $a - c \leq b - c$	
MULTIPLIER	③ $ac \leq bc$ si $c > 0$	④ $ac \geq bc$ si $c < 0$
DIVISER	⑤ $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ si $c > 0$	⑥ $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ si $c < 0$

Preuve : ① on suppose que $a \leq b \iff b - a \geq 0$

on veut démontrer que $a + c \leq b + c$

$(b+c) - (a+c) = b + c - a - c = b - a \geq 0$

④ on suppose que $a \leq b$ et $c < 0$

on veut démontrer que $ac \geq bc$

$bc - ac = \underbrace{c}_{<0}\underbrace{(b-a)}_{\geq 0} \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$

Ex 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$

$$\frac{x^2}{2-x} \leq \frac{x}{2-x}$$

⚠ À NE PAS FAIRE

$\cancel{\iff x^2 \leq x \iff x \leq 1}$

FAUX car on ne connait pas le signe de $2 - x$

FAUX car on ne connait pas le signe de x

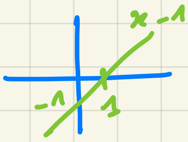
Solution correcte :

$$\frac{x^2}{2-x} \leq \frac{x}{2-x} \iff \frac{x^2 - x}{2-x} \leq 0$$

$$\iff \frac{x(x-1)}{2-x} \leq 0$$

Tableau de signe

$$\frac{x(x-1)}{2-x} \leq 0$$



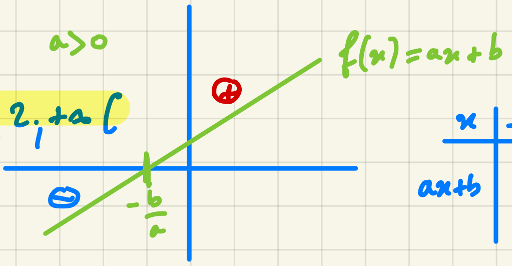
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$x = 0$

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

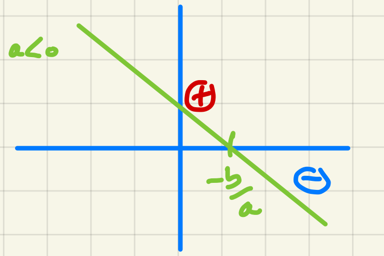
$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

$S = [0,1] \cup]2,+\infty[$



$ax+b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ $\quad a \neq 0$

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $(-a)$	0	signe de a



Opérations portant sur 2 inégalités :

Soient a, b, c, d des nombres réels

Si $\begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases}$ alors

(1) $a + c \leq b + d$

(2) $ac \leq bd$ si a, b, c, d positifs

⚠ Se méfier de la différence et du quotient

Ex 1 : on suppose que $1 \leq x \leq 2$ et $5 \leq y \leq 7$

alors :

$3 \leq 2x + 1 \leq 5$ $\qquad$ $2 \leq 2x \leq 4$

$-2 \leq -y + 5 \leq 0$ $\qquad$ $-7 \leq -y \leq -5$

$6 \leq x + y \leq 9$

somme

$-6 \leq x - y \leq -3$

$5 \leq xy \leq 14$

$\frac{1}{7} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{2}{5}$ $\qquad$ $\frac{1}{7} < \frac{1}{y} < \frac{1}{5}$

Théorèmes de rangement :

Si $0 < a < b$ alors ① $a^2 < b^2$

② $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

③ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Preuve : ① on suppose que $0 < a < b \iff b - a > 0$ et $a > 0$

on veut démontrer que $a^2 < b^2$

$b^2 - a^2 = \underset{+}{(b - a)}(\overset{+}{b} + \overset{+}{a}) > 0 \Rightarrow a^2 < b^2$

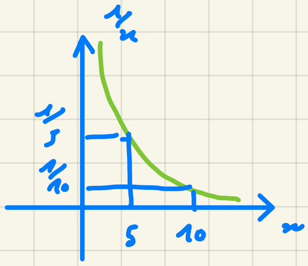
② $\sqrt{b} - \sqrt{a} = (\sqrt{b} - \sqrt{a})\dfrac{(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \dfrac{(\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$

$= \dfrac{\overset{+}{b - a}}{\underset{+}{\sqrt{b}} + \underset{+}{\sqrt{a}}} > 0 \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$

③ $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a}{ab} - \frac{b}{ab} = \dfrac{\overset{-}{a - b}}{\underset{+\ +}{ab}} < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

Ex 1 : On suppose que $4 < x$

Que peut-on dire de x^2, de $\sqrt{x}$ et de $\frac{1}{x}$?



$4 < x \Rightarrow 16 < x^2$

$\Rightarrow 2 < \sqrt{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} > \frac{1}{x}$

$5 < 10$

$\frac{1}{5} = 0{,}2 > \frac{1}{10} = 0{,}1$

Ex 2 : Déterminer sans calculatrice le signe de $3\sqrt{3} - 4\sqrt{2}$

méthode 1 $\quad 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} = \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{27} - \sqrt{32} < 0$

méthode 2 $\quad 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} = (3\sqrt{3} - 4\sqrt{2})\dfrac{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}} = \dfrac{(3\sqrt{3})^2 - (4\sqrt{2})^2}{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}} = \dfrac{27 - 32}{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}}$

$= \dfrac{-5}{3\sqrt{3} + 4\sqrt{2}} < 0$

Même question avec $9\sqrt{2} - 4\sqrt{10} = \sqrt{9^2 \times 2} - \sqrt{4^2 \times 10}$

$= \sqrt{162} - \sqrt{160} > 0$

IV Valeur absolue

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Ex1 : Calculer $|-3| = -(-3) = 3$ car $-3 \leqslant 0$

$|5| = 5$ car $5 \geqslant 0$

$|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$ car $\sqrt{2} - 1 \geqslant 0$

$|\sqrt{3} - \sqrt{4}| = -(\sqrt{3} - \sqrt{4})$ car $\sqrt{3} - \sqrt{4} \leqslant 0$

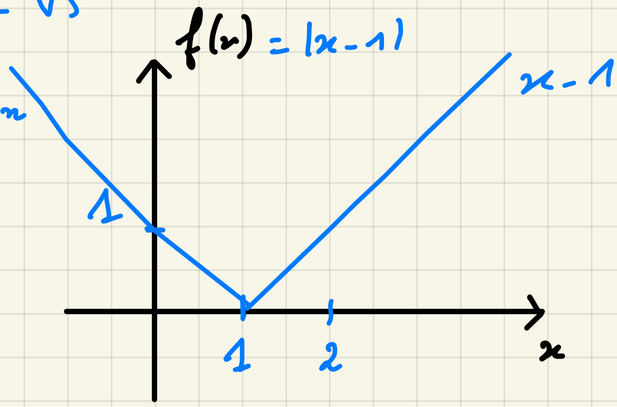
$= \sqrt{4} - \sqrt{3}$

Ex2 : Soit $f(x) = |x - 1|$

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ -(x-1) & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$$

$= -x + 1$

$= 1 - x$



Ex3 : Soit $f(x) = |x - 4| + |2 - x|$

① Calculer $f(5) = |1| + |-3| = 1 + 3 = 4$

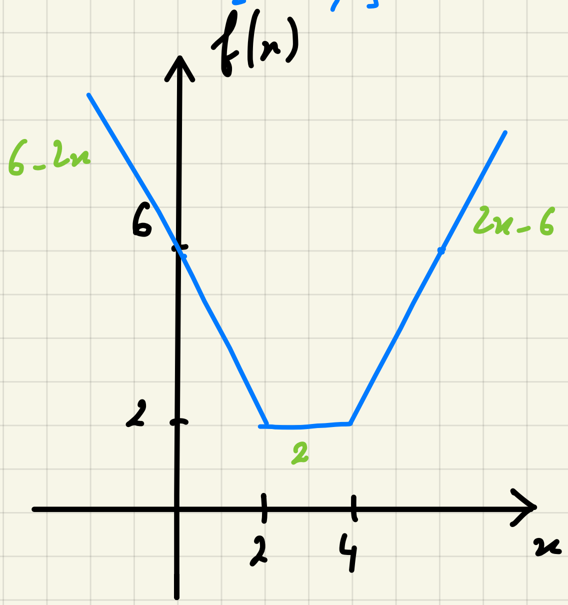
② $|x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{si } x \geqslant 4 \\ 4 - x & \text{si } x \leqslant 4 \end{cases}$

③ $|2 - x| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geqslant 2 \\ 2 - x & \text{si } x \leqslant 2 \end{cases}$ $\quad x \geqslant 2 \Rightarrow 2 - x \leqslant 0$

④ Tracer $\mathcal{C}_f$ puis résoudre $f(x) = 5$

$f(x) = |x-4| + |2-x|$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$\lvert x-4\rvert$		$4-x$		$4-x$	0	$x-4$	
$\lvert 2-x\rvert$		$2-x$	0	$x-2$		$x-2$	
$f(x)$		$6-2x$		2		$2x-6$	
$f(x)=5$		$6-2x=5$ $2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \in]-\infty;2]$		$2=5$ $\emptyset$		$2x-6=5$ $x=\frac{11}{2} \in [4;+\infty[$	



$f(6) = 2\times 6 - 6 = 6$

$f(0) = 6 - 2\times 0 = 6$

$$f(x) = \begin{cases} 6-2x & \text{si } x \leq 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq 2 \leq 4 \\ 2x-6 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

$S = \left\{ \frac{1}{2} ; \frac{11}{2} \right\}$

Exercice 13

Indiquer si les égalités suivantes sont exactes ou fausses

a. La somme de deux nombres supérieurs à -1 est supérieure à -1.

b. Le produit de deux nombres inférieurs à 1 est inférieur à 1.

c. $\left|\sqrt{2}-1\right|=\sqrt{2}-1$

d. $\left|\sqrt{2}-2\right|=\sqrt{2}-2$

Exercice 14

Résoudre dans **R** les inéquations :

a. $(x-1)(x-2)(3-x)>0$

b. $x \leq \dfrac{4}{x}$

c. $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{2}{x-1}$

d. $\dfrac{2x-5}{-x-3} < \dfrac{5}{-x-3}$

ex 13 V | F

a) $x > -1$ $\Rightarrow$ $x + y > -2$

FAUX $y > -1$

contre-ex : $x = -0{,}7$ $x + y = -1{,}4 < -1$

$y = -0{,}7$

b) $x < 1$ $\Rightarrow$ $xy < 1$??

FAUX $y < 1$

contre-ex : $x = -3$ $xy = 9 > 1$

$y = -3$

c) $|\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1$?

VRAI car $\sqrt{2} - 1 > 0$

d) $|\sqrt{2} - 2| = \sqrt{2} - 2$?

FAUX car $\sqrt{2} - 2 < 0$ $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$

$\sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} - \sqrt{4}$ $4 > 2$

$|\sqrt{2} - 2| = 2 - \sqrt{2}$

Exercice 14

Résoudre dans **R** les inéquations :

a. $(x-1)(x-2)(3-x)>0$

b. $x \leq \dfrac{4}{x}$

a) $\underbrace{(x-1)(x-2)(3-x)}_{P(x)} > 0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$3-x=0 \Rightarrow x=3$

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; 1[\cup]2;3[$

b) $x \leq \dfrac{4}{x} \iff \cancel{x^2 \leq 4}$

⚠ on ne connait pas le signe de x

$\iff x - \dfrac{4}{x} \leq 0 \iff \dfrac{x^2-4}{x} \leq 0$

$\iff \underbrace{\dfrac{(x-2)(x+2)}{x}}_{f(x)} \leq 0$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$x=0$

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

$S =]-\infty ; -2] \cup]0,2]$

pour vendredi

- ex 10 (b) (c)
- ex 10 bis B
- ex 11
- ex 14 (c) (d)

Exercice 10

Écrire sans racine carrée au dénominateur les fractions suivantes

a. $A=\dfrac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ b. $B=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ c. $C=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{2}-1}}$

Exercice 10 bis

Simplifier :

$A=\dfrac{2}{2+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{3}}}$ $B=\dfrac{10^2\times 9\sqrt{50}}{\sqrt{200\times 3^2}}$ $C=\dfrac{\sqrt{3}-2}{2+\sqrt{3}}$ $D=\ln(x^4)-3\ln(x)$

Ex 10 (b)

$$B=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\times\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}=\frac{2-2\sqrt{2}+1}{2-1}$$

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$B=3-2\sqrt{2}$$

(c)

$$C=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{2}{\sqrt{2}-1}}=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{2}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}}=\frac{\sqrt{2}}{1+\frac{2\sqrt{2}+2}{2-1}}$$

$$C=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+3}\times\frac{2\sqrt{2}-3}{2\sqrt{2}-3}=\frac{4-3\sqrt{2}}{8-9}=3\sqrt{2}-4$$

Ex 10 bis

$$B=\frac{10^2\times 9\sqrt{50}}{\sqrt{200\times 3^2}}$$

$\sqrt{50}=\sqrt{2\times 25}=5\sqrt{2}$

$\sqrt{200\times 3^2}=3\sqrt{200}=3\sqrt{2\times 10^2}=3\times 10\sqrt{2}$

$$B=\frac{10^{\cancel{2}}\times 9\times 5\cancel{\sqrt{2}}}{3\times\cancel{10}\cancel{\sqrt{2}}}=\frac{10\times 9\times 5}{3}=10\times 3\times 5=150$$

Exercice 11

Factoriser les expressions suivantes

a. $A = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$ b. $B = b^2 - a^2 + 2b - 2a$ c. $C = (a^2 + b^2)^2 - 4(ab)^2$

$A = \underbrace{a^3 + a^2b}_{=} \underbrace{- ab^2 - b^3}_{=}$

$A = a^2(a+b) - b^2(a+b)$

$A = (a+b)(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)(a+b)$

$A = (a+b)^2(a-b)$

$B = \underbrace{b^2 - a^2}_{=} + \underbrace{2b - 2a}$

$B = (b-a)(b+a) + 2(b-a)$

$B = (b-a)(b+a+2)$

$C = (a^2+b^2)^2 - 4(ab)^2$ type $A^2 - B^2$ avec $A = a^2 + b^2$ et $B = 2ab$

$C = (a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab)$

$C = (a-b)^2(a+b)^2$

Exercice 14

Résoudre dans **R** les inéquations :

a. $(x-1)(x-2)(3-x)>0$

b. $x \le \dfrac{4}{x}$

c. $\dfrac{1}{x+1} \ge \dfrac{2}{x-1}$

d. $\dfrac{2x-5}{-x-3} < \dfrac{5}{-x-3}$

ⓒ $\dfrac{1}{x+1} \geq \dfrac{2}{x-1} \iff \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{2}{x-1} \geq 0$

$\iff \dfrac{x-1-2(x+1)}{(x+1)(x-1)} \geq 0$

$\iff \dfrac{-x-3}{(x+1)(x-1)} \geq 0$

$f(x) = \dfrac{-x-3}{(x+1)(x-1)}$

$-x-3=0 \iff x=-3$

$x+1=0 \iff x=-1$

$x-1=0 \iff x=1$

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$-x-3$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

$S =]-\infty ; -3] \cup]1 ; 1[$

ⓓ $\dfrac{2x-5}{-x-3} < \dfrac{5}{-x-3} \iff \dfrac{2x-5}{-x-3} - \dfrac{5}{-x-3} < 0$

$\iff \dfrac{2x-10}{-x-3} < 0$

$g(x) = \dfrac{2x-10}{-x-3}$

$2x-10=0 \iff x=5$

$-x-3=0 \iff x=-3$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$2x-10$		$-$		$-$	0	$+$	
$-x-3$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

$S =]-\infty ; -3[\cup [5 ; +\infty[$

Exercice 6

Simplifiez les expressions suivantes, lorsque c'est possible :

a. $\ln(e)$ 1 b. $\ln(1)$ 0 c. $\ln(e^5)$ 5 d. $\ln(0)$ n'existe pas e. e^0 1

f. $\ln(\frac{a}{b})$ $\ln a - \ln b$ g. $\ln(8)$ $3\ln 2$ h. e^8 pas simplifiable i. $\ln(\frac{a}{b})+\ln(\frac{b}{c})+\ln(\frac{c}{a})$ 0

Exercice 7

Simplifiez les expressions suivantes :

a. $x^2e^{-2\ln(x)}$ b. $e^{x\ln(y)+y\ln(x)}$

Ex 7 :

$$x^2 e^{-2\ln x} = x^2 e^{\ln(x^{-2})} \quad \text{car} \quad \ln(x^n) = n\ln x$$

$$= x^2 \times x^{-2}$$

$$= x^0$$

$$= 1$$

$$e^{x\ln y + y\ln x} = e^{x\ln y} \times e^{y\ln x}$$

$$= e^{\ln(y^x)} \times e^{\ln(x^y)}$$

$$= y^x \times x^y$$

Exercice 8

Soit la fonction $f(x) = e^{2x} - e^x$. Calculer et simplifier:

a. $f(0)$ $= 0$

b. $f(1)$ $= e^2 - e = e(e-1)$

c. $f(\ln(\frac{1}{3}))$ $= e^{2\ln(1/3)} - e^{\ln(1/3)}$ $= e^{\ln(\frac{1}{3})^2} - \frac{1}{3}$ $= \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{9}$

d. $f(\ln(\frac{1}{9}))$ $= \frac{1}{9^2} - \frac{1}{9} = \frac{-8}{81}$

Exercice 9

Résoudre les équations suivantes :

a. $\ln(x) = -1$ $\iff x = e^{-1}$

b. $\ln(x^2) = 2$ $\iff x^2 = e^2$ $\iff x = \pm e$

Pour quelles valeurs de x les égalités suivantes sont-elles vraies ? :

a. $e^{\ln(x)} = x$ $\forall x > 0$

b. $\ln(e^x) = x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Exercice 15

Résoudre dans R les équations et inéquations suivantes :

$|X| = |Y| \iff X = \pm Y$

a. $|x| = 1$ b. $|x| = -1$ c. $|2x+1| = 1$ d. $|x-1| = |x+1|$

(a) $\iff x = \pm 1$

$S = \{\pm 1\}$

(b) impossible

$S = \emptyset$

(c) $\iff 2x+1 = 1$ ou $2x+1 = -1$

$\iff 2x = 0$ ou $2x = -2$

$\iff x = 0$ ou $x = -1$

$S = \{0 ; -1\}$

(d) $\iff x-1 = x+1$ $\emptyset$

ou $x-1 = -x+1$

$\iff 2x = 2$

$\iff x = 1$

$S = \{1\}$

$\sqrt{x^2} = |x|$

e. $|2x| = |3x+1|$ f. $|x^2-4| < 1$ g. $1 < |x-1| \leq 2$ h. $\sqrt{(x-1)^2} \leq 1$

(e) $\iff 2x = 3x+1$

ou $2x = -3x-1$

$\iff x = -1$

ou $5x = -1$

$\iff x = -1$

ou $x = -\frac{1}{5}$

$S = \{-1 ; -\frac{1}{5}\}$

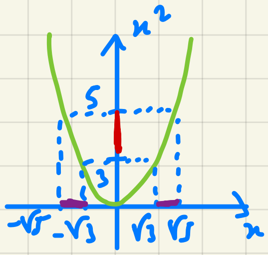
(f) $\iff -1 < x^2 - 4 < 1$

$\iff 3 < x^2 < 5$

$\iff -\sqrt{5} < x < -\sqrt{3}$

ou $\sqrt{3} < x < \sqrt{5}$

$S =]-\sqrt{5} ; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3} ; \sqrt{5}[$



(g) 1er cas : $x - 1 \geq 0$

$\iff x \geq 1$

$1 < x-1 \leq 2$

$\iff 2 < x \leq 3$

2e cas : $x - 1 \leq 0$

$\iff x \leq 1$

$1 < -x+1 \leq 2$

$\iff 0 < -x \leq 1$

$\iff 0 > x \geq -1$

Conclusion :

$S = [-1 ; 0[\cup]2 ; 3]$

(h) $\iff |x-1| \leq 1$

$\iff -1 \leq x-1 \leq 1$

$\iff 0 \leq x \leq 2$

$S = [0 ; 2]$

i. $|x| < 1$ j. $|2x-1| > 1$

(i) $\iff -1 < x < 1$

$S =]-1 ; 1[$

(j) $\iff 2x-1 > 1$ ou $2x-1 < -1$

$\iff 2x > 2$ ou $2x < 0$

$\iff x > 1$ ou $x < 0$

$S =]-\infty ; 0[\cup]1 ; +\infty[$

Exercice 16

Trouver l'ensemble des réels x tels que : $|x-2|+|2x-2|=1$

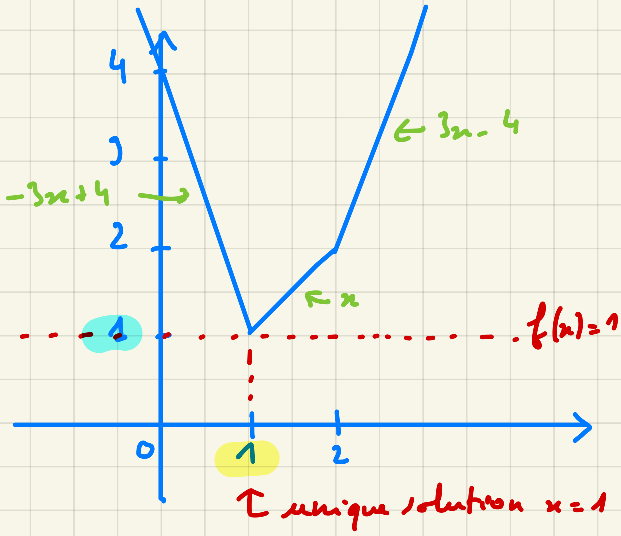
on note $f(x) = |x-2| + |2x-2|$

$x-2=0 \iff x=2$ $\quad$ $2x-2=0 \iff x=1$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x+2 & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \qquad |2x-2| = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x \geq 1 \\ -2x+2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$ $\quad$ 1	1 $\quad$ 2	2 $\quad$ $+\infty$
$\|x-2\|$	$-x+2$	$-x+2$ $\quad$ 0	$x-2$
$\|2x-2\|$	$-2x+2$ $\quad$ 0	$2x-2$	$2x-2$
$f(x)$	$-3x+4$	x	$3x-4$
$f(x)=1$	$-3x+4=1$ $\iff 3x=3$ $\iff x=1$	$x=1$	$3x-4=1$ $\iff 3x=-3$ $\iff x=-1$

$\emptyset$ car $-1 \notin [2,+\infty[$



$S = \{1\}$

<u>Remarque</u> : le tracé de graphe n'était pas nécessaire ici.

Propriété : Soit $a \geq 0$, $X \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbb{R}$

$|X| = a \iff X = \pm a$ $\quad S = \{\pm a\}$

$|X| \leq a \iff -a \leq X \leq a$ $\quad S = [-a, a]$

$|X| \geq a \iff X \geq a$ ou $X \leq -a$ $\quad S =]-\infty ; -a] \cup [a, +\infty[$

$|X| = |Y| \iff X = Y$ ou $X = -Y$

Ex 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$

① $|x| = 2 \iff x = \pm 2$ $\quad S = \{\pm 2\}$

② $|x| \leq 3 \iff -3 \leq x \leq 3$ $\quad S = [-3 ; 3]$

③ $|x| \geq 1 \iff x \geq 1$ ou $x \leq -1$ $\quad S =]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$

Ex 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$

① $|x - 3| \leq 1 \iff -1 \leq x - 3 \leq 1 \iff 2 \leq x \leq 4$ $\quad S = [2 ; 4]$

② $|2x + 1| \geq 2 \iff 2x + 1 \geq 2$ ou $2x + 1 \leq -2$

$\iff 2x \geq 1$ ou $2x \leq -3$

$\iff x \geq 1/2$ ou $x \leq -3/2$ $\quad S =]-\infty ; -\frac{3}{2}] \cup [\frac{1}{2} ; +\infty[$

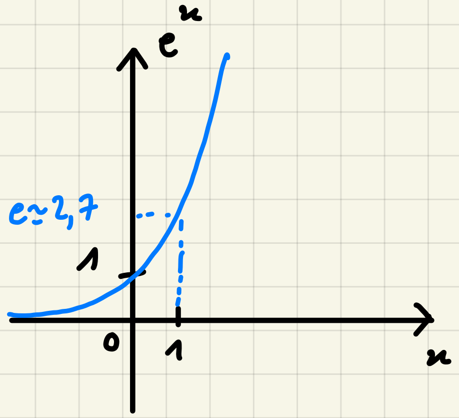
③ $|x - 5| \leq -2$

impossible car une valeur absolue est toujours ≥ 0 $\Rightarrow S = \emptyset$

④ $|x + 7| \geq -1$

toujours vrai ! $\quad S = \mathbb{R}$

V Fonction exp



$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

e^x est définie sur $\mathbb{R}$

signe de e^x : $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$e^0 = 1 \qquad e^1 \simeq 2{,}7$

$e^a \times e^b = e^{a+b}$

$\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \qquad \dfrac{1}{e^b} = e^{-b}$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$(e^x)' = e^x$

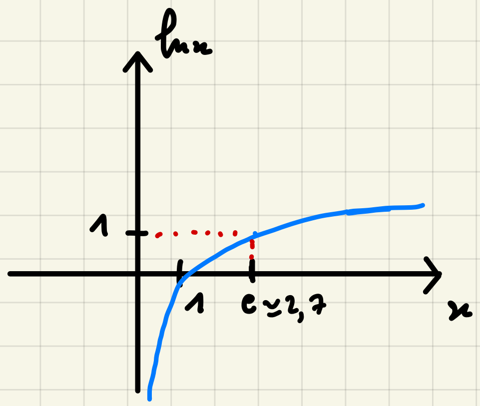
$(e^u)' = u' e^u$

Exemple : ① Calculer $\dfrac{e^{-x} \times e^{2x}}{(e^x)^3} = \dfrac{e^x}{e^{3x}} = e^x \times e^{-3x} = e^{-2x}$

② Soit $f(x) = 3e^{x^2 - x}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

$f'(x) = 3 \times (2x - 1) e^{x^2 - x}$ car $\begin{cases} u(x) = x^2 - x \\ u'(x) = 2x - 1 \end{cases}$

VI Fonction ln



$x \mapsto \ln x$ est définie sur $]0;+\infty[= \mathbb{R}_+^*$

signe de $\ln x$:

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	||	$-$	0	$+$	

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\ln 1 = 0$ $\qquad \ln e = 1$

$\ln a + \ln b = \ln(ab)$

$\ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$

$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

$\ln(a^n) = n \ln a$

$\ln(e^x) = x$ $\qquad$ pour $x \in \mathbb{R}$

$e^{\ln x} = x$ $\qquad$ pour $x \in]0,+\infty[$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $\qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

Ex1: Résoudre dans $\mathbb{R}$

① $\ln(x+1) + \ln(x-1) = \ln(2)$ $\qquad$ défini si $x+1>0$ et $x-1>0$

$\iff x > -1$ et $x > 1$

donc $D_f =]1;+\infty[$

$\iff \ln((x+1)(x-1)) = \ln 2$

$\iff (x+1)(x-1) = 2$

$\iff x^2 - 1 = 2 \iff x^2 = 3 \iff x = \pm\sqrt{3}$

or $-\sqrt{3} \notin D_f$ donc $S = \{\sqrt{3}\}$

② $e^{-x} \leq e \iff \ln(e^{-x}) \leq \ln e$

$\iff -x \leq 1 \iff x \geq -1$

Ex2: Soit $f(x) = 5\ln(x^2+1)$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

(car $x^2+1>0$)

$f'(x) = 5 \times \frac{2x}{x^2+1} = \frac{10x}{x^2+1}$

$u(x) = x^2+1$

$u'(x) = 2x$

VII Suites arithmétiques et géométriques

1) Manipulation de sommes

Σ = sigma = somme

Définition.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

k = indice $\qquad$ a_k = terme général de la somme

♡ nombre de termes = dernier indice − premier indice + 1 = $n+1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad$ $n \quad - \quad 0 \quad + 1$

Propriétés : $\qquad \alpha \in \mathbb{C}$ $\qquad \alpha$ = alpha

① $$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}$$

② $$\sum_{k=0}^{n} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k$$

③ $$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Preuve :

① $$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k + a_{n+1}$$

② $$\sum_{k=0}^{n} \alpha a_k = \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 + \dots + \alpha a_n = \alpha (a_0 + a_1 + \dots + a_n)$$
$$= \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k$$

③ $$\sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n)$$
$$= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) + (b_0 + b_1 + \dots + b_n)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

Ex 1 :

1) Simplifier $A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}$

de deux manières différentes

2) En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$

Solution :

1) Méthode 1 : Enlever les Σ

$$A_n = \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{3}} + \dots + \cancel{\frac{1}{n-1}}\right)$$

$$\boxed{A_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}}$$

Méthode 2 : Regrouper les Σ $\qquad \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k)$

⚠ Pour le faire, il faut avoir les mêmes indices de départ et d'arrivée.

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} \qquad \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \sum_{k=2}^{n} a_k$$

$$A_n = \underset{k=0}{1} + \underset{k=1}{\frac{1}{2}} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}$$

$$A_n = \frac{3}{2} + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k-1}\right) = \frac{3}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1-(k+1)}{(k+1)(k-1)}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \boxed{A_n = \frac{3}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{-2}{k^2-1}}$$

$$\iff \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \frac{3}{2} - 2 \underbrace{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}}_{X}$$

$\frac{3}{2} - 2X = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow 2X =$

$\Rightarrow X =$

$$\iff 2 \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\iff S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)$$

2) Suites arithmétiques

Ex1:

$$\begin{array}{ccccccc} u_0 & u_1 & u_2 & & & & u_n \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 & \dots & \end{array}$$

$1 \xrightarrow{+3} 4 \xrightarrow{+3} 7 \xrightarrow{+3} 10$

u_n est une suite arithmétique de raison $r = 3$

$$u_{n+1} = u_n + 3$$

$$u_1 = u_0 + 3$$

$$u_2 = u_1 + 3 = u_0 + 3 + 3 = u_0 + 2 \times 3$$

$$u_3 = u_2 + 3 = u_0 + 2\times 3 + 3 = u_0 + 3 \times 3$$

$\vdots$

$$u_n = u_0 + n \times 3$$

Définition: On dit que u_n est une suite arithmétique de raison r si elle vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + r$ ♡

Cela traduit le fait que tout terme est égal au précédent augmenté de r.

Propriété:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

♡
$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \underbrace{\text{nbre de termes}}_{\text{dernier indice - premier indice + 1}} \times \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} = (n+1)\,\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Preuve:

① Calculer $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

② En déduire $\sum_{k=0}^{n} u_k$

①
$$\begin{array}{rl} & S_n = 1 + 2 + 3 + \dots\dots + (n-2) + (n-1) + n \\ + & S_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots\dots + 3 + 2 + 1 \\ \hline & 2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots\dots + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ termes}} = n(n+1) \end{array}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

② $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} (u_0 + kr)$

Suite arithmétique
$u_n = u_0 + nr$

$= \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_0}_{u_0 + u_0 + u_0 + \dots + u_0} + \sum_{k=0}^{n} kr$ ↓ $r = \text{cste}$

$n - 0 + 1$ termes

$= (n+1) u_0 + r \sum_{k=0}^{n} k$

$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$= (n+1) u_0 + r (0 + 1 + 2 + \dots + n)$

$= (n+1) u_0 + r \frac{n(n+1)}{2}$

$= (n+1) \left(u_0 + \frac{rn}{2} \right) = (n+1) \frac{2u_0 + rn}{2}$

$= (n+1) \frac{u_0 + u_0 + rn}{2} = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$

Ex 1 : ① Ecrire sans Σ puis calculer $\sum_{k=3}^{8} (2 + 4k)$

$\sum_{k=3}^{8} (2+4k) = \underbrace{(2 + 4\times 3)}_{k=3} + \underbrace{(2+4\times 4)}_{k=4} + \underbrace{(2+4\times 5)}_{k=5} + \dots + \underbrace{(2+4\times 8)}_{k=8}$

$= 14 \xrightarrow{+4} 18 \xrightarrow{+4} 22 + \dots + 34 = (8-3+1) \frac{14+34}{2}$

$= 6 \times \frac{48}{2} = 6 \times 24$

$= 144$

② Ecrire sans Σ puis calculer $\sum_{k=2}^{n-1} (-k+5)$

$\sum_{k=2}^{n-1} (-k+5) = \underbrace{(-2+5)}_{k=2} + \underbrace{(-3+5)}_{k=3} + \underbrace{(-4+5)}_{k=4} + \dots + (-(n-1)+5)$

$= 3 \xrightarrow{-1} 2 \xrightarrow{-1} 1 + \dots + (6-n)$ $\quad r = -1$

TD2 ex7

$= (n-1-2+1) \times \frac{3 + 6 - n}{2}$

$= (n-2) \frac{9-n}{2} = \frac{(n-2)(9-n)}{2}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \text{nbre de termes} \times \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}}$$

nbre de termes = dernier indice − premier indice + 1

3) Suites géométriques

Ex 1: $\overset{u_0}{3} \quad \overset{u_1}{6} \quad \overset{u_2}{12} \quad 24 \quad 48 \quad \dots \quad u_n$

$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24$

u_n est une suite géométrique de raison $q = 2$

$u_{n+1} = 2 u_n$

$u_1 = 2 u_0$

$u_2 = 2 u_1 = 2 \times 2 u_0 = 2^2 u_0$

$u_3 = 2 u_2 = 2 \times 2^2 u_0 = 2^3 u_0$

$\vdots$

$u_n = 2^n u_0$

Définition: On dit que u_n est une suite géométrique de raison q si elle vérifie la relation $\boxed{u_{n+1} = q\, u_n}$

Cela traduit le fait que tout terme est égal au précédent multiplié par q.

Propriété:

$$u_n = u_0 \, q^n$$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q} = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}$$

Preuve: Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$

① Calculer $S_n - q S_n$

② En déduire S_n puis $\sum_{k=0}^{n} u_k$

Solution: $S_n - q S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n - q(1 + q + q^2 + \dots + q^n)$

$S_n - q S_n = 1 + \cancel{q} + \cancel{q^2} + \cancel{\dots} + \cancel{q^n} - \cancel{q} - \cancel{q^2} - \cancel{q^3} - \dots - \cancel{q^n} - q^{n+1}$

$= 1 - q^{n+1}$

$\Rightarrow \quad S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$

$\Rightarrow \quad S_n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On a démontré que $S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

On en déduit $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_0 q + u_0 q^2 + \dots + u_0 q^n = u_0(1+q+\dots+q^n) = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

$u_k = u_0 q^k$

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_0 q^k = u_0 \underbrace{\sum_{k=0}^{n} q^k}_{S_n} = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Ex 1 : ① Ecrire sans Σ puis calculer $\displaystyle\sum_{k=4}^{n} 3^k$

$\times 3 \qquad \times 3 \qquad q = 3$

$$\sum_{k=4}^{n} 3^k = 3^4 + 3^5 + 3^6 + \dots + 3^n$$

$$= 1^{er}\text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1-q} = 3^4 \times \frac{1 - 3^{n-4+1}}{1-3}$$

$$= 3^4 \, \frac{1-3^{n-3}}{-2} = 3^4 \times \frac{3^{n-3}-1}{2} = \frac{3^{n+1} - 3^4}{2} = \frac{3^{n+1} - 81}{2}$$

② Ecrire sans Σ puis calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3(-2)^k$

pour vendredi :

TD 2

ex 7

+

ex du cours :

ex 1 ②

ex 2 (mélange)

Ex 2 (mélangé)

1. $$\sum_{k=0}^{n-2} (-1+6k) =$$

2. $$\sum_{k=3}^{n} \frac{5}{2^k} =$$

3. $$\sum_{k=0}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 =$$