DEMONSTRATION PAR RECURRENCE

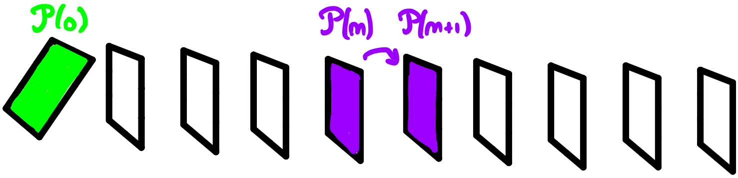
La démonstration par récurrence repose sur le principe très concret suivant :

- Si on pousse le 1[er] domino et que un domino tombant fait tomber le suivant, alors tous les dominos tombent

- Si une grenouille se trouve sur la première marche d'un escalier et qu'elle sait monter d'une marche à l'autre alors, elle pourra monter sur n'importe quelle marche

On peut appliquer ce principe à n'importe quelle propriété dépendant d'un entier n, notée $\mathcal{P}(n)$

Si la proposition est vraie au début (pour $n_0 = 0$ ou 1) et qu'elle est héréditaire (si elle vraie au rang n alors elle vraie au rang $n+1$) alors, elle est vraie pour tout $n \geq n_0$.



Principe de récurrence : Soit une proposition $\mathcal{P}(n)$

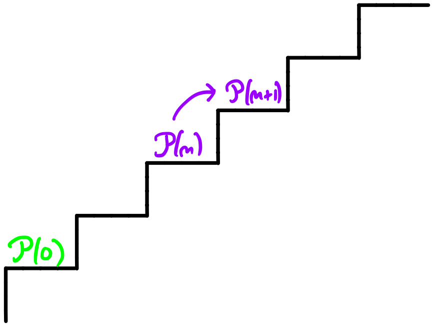
Si $\underbrace{\mathcal{P}(n_0) \text{ est vraie}}_{\text{Initialisation}}$ et $\forall n \geq n_0$ $\underbrace{\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)}_{\text{Hérédité}}$, alors $\underbrace{\forall n \geq n_0 \ \mathcal{P}(n) \text{ est vraie}}_{\text{Conclusion}}$.

En effet, par phénomène de cascade, si $\mathcal{P}(0)$ est vraie alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie et donc $\mathcal{P}(2)$ est vrai et ainsi de suite donc $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \geq 0$.

Claire Schmidt
IUT de Cachan
GEii1 - S1

Une récurrence se rédige donc en 3 parties :

① Initialisation ② Hérédité ③ conclusion



L'initialisation est simple : il suffit de vérifier que $P(0)$ (ou $P(1)$) est vraie.

L'hérédité est le plus difficile à démontrer. C'est pourquoi il faut toujours expliciter $\boxed{P(n)}$ (hypothèse de récurrence) et $\boxed{P(n+1)}$ (ce qu'il faut démontrer) clairement.

Exemple 1 : Démontrons par récurrence que $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

On note $P(n)$: $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Initialisation : pour $n=1$, on a bien $1 = \frac{1\times 2}{2}$ donc $P(1)$ est vrai

Hérédité : Soit $n \geq 1$. On suppose que $P(n)$: $\boxed{1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}}$ est vrai

hypothèse de récurrence

On veut démontrer $P(n+1)$: $1+2+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

On calcule $\underline{1+2+\dots+n}+(n+1) = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} + n+1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

D'après l'hypothèse de récurrence

donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion : $\forall n \geq 1$ $P(n)$ est vraie

autrement dit, $\forall n \geq 1$ $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Attention : si vous n'utilisez pas l'hypothèse de récurrence, ce n'est pas une récurrence !

Exemple 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 10u_n + 9$

On cherche à déterminer u_n en fonction de n

On calcule $u_1 = 10u_0 + 9 = \underset{60-1}{59}$, $u_2 = 10u_1 + 9 = \underset{600-1}{599}$, $u_3 = 10u_2 + 9 = \underset{6000-1}{5999}$ $\Rightarrow$ il semble que $\underline{u_n = 6.10^n - 1}$

ceci est une conjecture, il faut le démontrer !

Démontrons le par récurrence. Soit $P(n)$: $u_n = 6.10^n - 1$

Initialisation : $u_0 = 5$ et $6.10^0 - 1 = 6-1 = 5$ donc $P(0)$ est vraie

Hérédité : Soit $n \geq 0$, on suppose que $P(n)$: $\boxed{u_n = 6.10^n - 1}$ est vrai

hypothèse de récurrence

on veut démontrer $P(n+1)$: $u_{n+1} = 6.10^{n+1} - 1$

On a $u_{n+1} = 10\boxed{u_n} + 9 = 10(\boxed{6.10^n - 1}) + 9 = \underline{6.10^{n+1}} - 10 + 9 = 6.10^{n+1} - 1$ donc $P(n+1)$ est vrai.

D'après hypothèse de récurrence

car $10 \times 10^n = 10^{n+1}$

Conclusion : $\forall n \geq 0$ $u_n = 6.10^n - 1$