Devoir de préparation au DS3 de mathématiques

(extrait de l'annexe du fascicule de TD + ex sup)

Fonctions élémentaires

Exercice 10 :

Etudier la fonction suivante (Ensemble de définition, sens de variation, branches infinies et tracé de courbe) : $f(x) = e^x(x+1)$

Exercice 11

Donner en justifiant le domaine de définition puis déterminer les branches infinies de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x-1}$$

Question supplémentaire: étudier les branches infinies de :

$$g(x) = \sqrt{x^2+1}$$

Trigonométrie

Exercice sup 1 :

On considère les points de coordonnées cartésiennes A(-2,2), B(0,2), C(-2,0) et D($2\sqrt{3}$,-2)

1) Placer les points dans le plan (on rappelle que $\sqrt{3} \simeq 1,7$)
2) Déterminer les coordonnées polaires de A, B , C et D
3) Mettre en évidence les valeurs des longueurs et des angles obtenus à la question 2) sur le schéma.

Exercice 12 (extrait)

Résoudre l'équation trigonométrique suivante dans IR. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

$$\cos(2x) = \sin(x)$$

Extrait du TD :

On considère un réel α tel que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Placer α sur le cercle trigonométrique. Calculez $\cos\alpha$ et $\sin 3\alpha$.

Exercice 13 :

1) Résoudre $sin(x) = -\frac{1}{2}$ dans IR.
2) Résoudre $cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans IR puis dans] π ; π].
3) Résoudre $cos(x) + sin(x) = 1$ dans IR puis dans [0 ;2 π].

question supplémentaire : tracer la courbe représentative de $f(x) = cos(x) + sin(x)$ et vérifier graphiquement les résultats obtenus à la question 3)

Complexes

Exercice sup 2 :

Mettre sous forme algébrique :

$A = (1 - j\sqrt{3})^2$ $\quad B = (2 - j)^4$ $\quad C = \frac{2}{1-j} + \frac{2}{1+j}$

$D = j^2 - j^6 + j^8 - j^9$ $\quad E = \frac{3-j}{3+j}$ $\quad F = \sum_{n=0}^{150} j^n$

Exercice 18

Dans tout cet exercice, les nombres manipulés sont des entiers naturels. L'objectif est de démontrer par deux méthodes que : « toute puissance entière d'une somme de deux carrés est elle-même une somme de deux carrés ».

a) Démontrer l'inégalité dite de Lagrange $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. En déduire le résultat recherché en effectuant une démonstration par récurrence.

b) On pose $z = (a + bj)^n = A + Bj$. Calculer $z \times \bar{z}$ et en déduire le résultat voulu.

Rappel : le conjugué $\bar{z}$ d'un nombre complexe $z=x+jy$ est défini par $\bar{z}=x-jy$

Eléments de correction

Fonctions élémentaires

Exercice 10 :

Etudier la fonction suivante (Ensemble de définition, sens de variation, branches infinies et tracé de courbe) : $f(x) = e^x(x+1)$

f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ $\qquad (uv)' = u'v + uv'$

$f'(x) = e^x(x+1) + e^x = \underbrace{e^x}_{>0}(x+2)$ est du signe de $x+2$

$x+2=0 \iff x=-2$

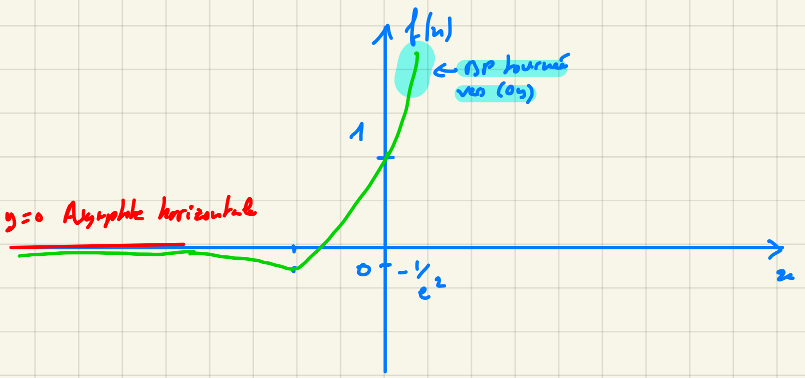
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$-e^{-2} = -\dfrac{1}{e^2} \leftarrow e \simeq 2{,}7 \Rightarrow \dfrac{1}{e^2}$ entre $\dfrac{1}{2^2}$ et $\dfrac{1}{3^2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc $y=0$ est asymptote horizontale en $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc on continue : $\dfrac{f(x)}{x} = \underbrace{e^x}_{\to+\infty}\underbrace{\dfrac{x+1}{x}}_{\to 1} \to +\infty$

donc on a une BP (= branche parabolique) tournée vers (Oy) en $+\infty$



$f(0) = 1$

Exercice 11

Donner en justifiant le domaine de définition puis déterminer les branches infinies de la fonction suivante :

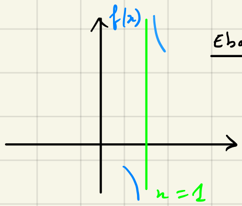
$$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x-1}$$

$f(x) = \dfrac{2x^2+3x+1}{x-1}$ est définie si $x-1 \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\} =]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

On étudie les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition, c.a.d. en $\pm\infty$ et en 1.

En 1 : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$ } donc $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$

Ebauche de courbe



En $+\infty$: on a une forme indéterminée (F.I.) de type $\frac{+\infty}{+\infty}$

$f(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{2x^2}{x} = 2x$ (terme de + haut degré en haut et en bas → valable uniquement en ∞)

> $f(x) \underset{+\infty}{\sim} g(x)$ signifie que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ autrement dit les fonctions se comporte de manière équivalente en $+\infty$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On continue : $\frac{f(x)}{x} = \frac{2x^2+3x+1}{x^2-x} \underset{+\infty}{\sim} 2$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

Rappel : Si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ alors on étudie $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
- → ∞ BP tournée vers (O_y) (comme x^2 ou e^x)
- → 0 BP tournée vers (O_x) (comme $\sqrt{x}$ ou $\ln x$)
- → a on continue : si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) - ax = b$ alors $y = ax + b$ est asymptote oblique en ∞

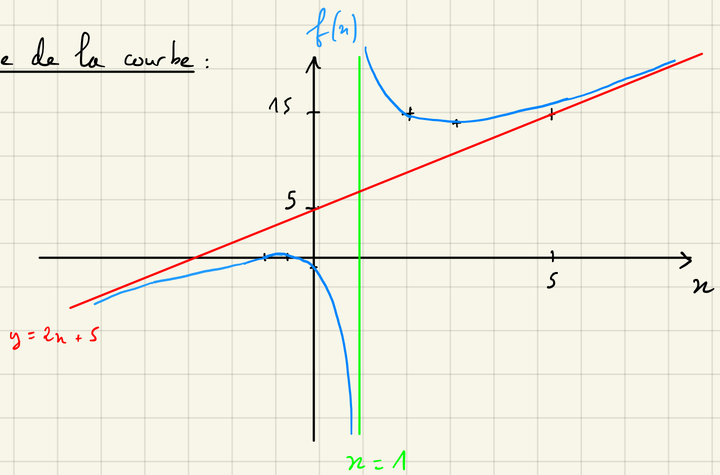
On a obtenu $a = 2$ donc on cherche $f(x) - ax = f(x) - 2x$

$$f(x) - 2x = \frac{2x^2+3x+1}{x-1} - 2x = \frac{2x^2+3x+1-2x^2+2x}{x-1} = \frac{5x+1}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} 5$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 5$ donc $b = 5$ et $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique d'équation $y = 2x + 5$ en $+\infty$

En $-\infty$: Par un raisonnement similaire, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $y = 2x+5$ asymptote oblique en $-\infty$ également.

Allure de la courbe :



$f(x) = \frac{2x^2+3x+1}{x-1}$

$f(2) = 15$ $\quad f(3) = \frac{18+9+1}{2} = 14$

$f(0) = -1$

$2x^2 + 3x + 1 = (2x+1)(x+1)$

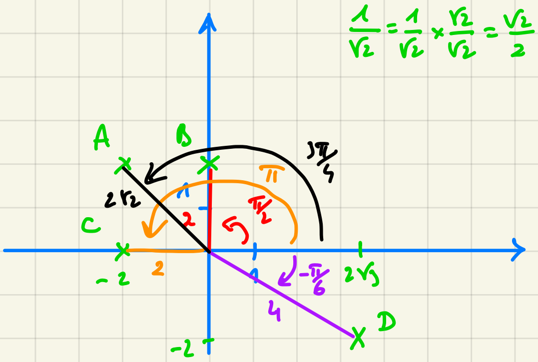
s'annule en $-\frac{1}{2}$ et -1

Trigonométrie

Exercice sup 1 :

On considère les points de coordonnées cartésiennes A(-2,2), B(0,2), C(-2,0) et D($2\sqrt{3}$,-2)

1) Placer les points dans le plan (on rappelle que $\sqrt{3} \simeq 1,7$)
2) Déterminer les coordonnées polaires de A, B , C et D
3) Mettre en évidence les valeurs des longueurs et des angles obtenus à la question 2) sur le schéma.



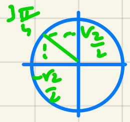
A connaître

$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- A(-2,2)

$r = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \sqrt{4\times 2} = 2\sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$



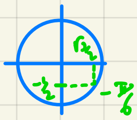
donc $A\langle 2\sqrt{2} ; \frac{3\pi}{4} \rangle$

- B(0,2) $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\quad B\langle 2, \frac{\pi}{2} \rangle$

- C(-2,0) $r = 2$ et $\theta = \pi$ $\quad C\langle 2, \pi \rangle$

- D($2\sqrt{3}$,-2) $r = \sqrt{12+4} = 4$ $\quad D\langle 4, -\frac{\pi}{6} \rangle$

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$



Exercice 12 (extrait)

Résoudre l'équation trigonométrique suivante dans IR. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique :

$$\cos(2x) = \sin(x)$$

$\cos(2x) = \sin x \iff \cos(2x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ $\qquad \sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

$\iff 2x = \frac{\pi}{2} - x\ (2\pi)$ ou $2x = -\frac{\pi}{2} + x\ (2\pi)$ $\qquad \cos x = \cos y \iff x = \pm y\ (2\pi)$

$\iff 3x = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$ ou $x = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

$\iff x = \frac{\pi}{6}\ (\frac{2\pi}{3})$ ou $x = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

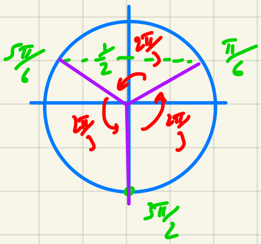
$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{6}\ (\frac{2\pi}{3}) ; -\frac{\pi}{2}\ (2\pi) \right\}$

$S_{[0,2\pi[} = \left\{ \frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6} ; \frac{3\pi}{2} \right\}$

$\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$

$\frac{5\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{9\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}$

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2}$



Question supplémentaire: étudier les branches infinies de :

$$g(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$x^2+1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ donc g est définie sur $\mathbb{R}$

En $+\infty$: $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et $\frac{g(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

or $\sqrt{x^2+1} = \sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = |x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ $\qquad \sqrt{x^2} = |x|$

donc $\frac{g(x)}{x} = \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$ si $x \geq 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = 1 \Rightarrow a = 1$

$g(x) - x = \sqrt{x^2+1} - x$ forme indéterminée

$$= \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} \to 0 \text{ si } x \to +\infty$$

donc $b = 0$ et $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$ $\qquad y = \overset{1}{a}x + \overset{0}{b}$

En $-\infty$. $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ et $\frac{g(x)}{x} = \frac{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \to -1$ si $x \to -\infty$

$|x| = -x$ si $x \leq 0$

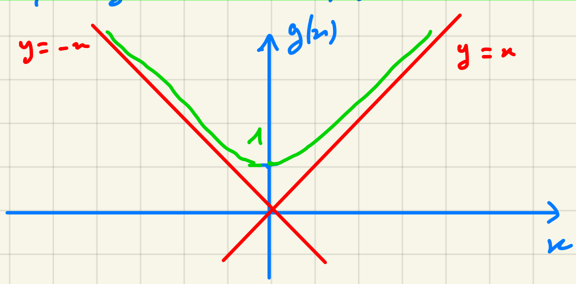
donc $a = -1$. De plus, $\sqrt{x^2+1} + x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} \to 0$ si $x \to -\infty$

donc $y = -x$ est asymptote oblique en $-\infty$.

Remarque: on aurait aussi pu remarquer que g est paire

En effet $g(-x) = \sqrt{(-x)^2+1} = \sqrt{x^2+1} = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

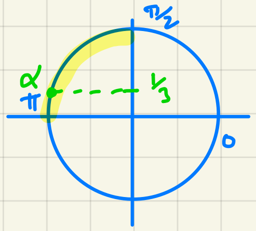
$\Rightarrow$ on déduit que $y = -x$ est asymptote en $-\infty$ par symétrie / (Oy)



$g(0) = 1$

Extrait du TD :

On considère un réel α tel que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ et $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Placer α sur le cercle trigonométrique. Calculez $\cos\alpha$ et $\sin 3\alpha$.



$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$

mais $\cos\alpha \leq 0$ car $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ donc $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)\cos(\alpha)$

or $\sin(2\alpha) = 2\cos\alpha\sin\alpha = 2 \times -\frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{1}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

et $\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{8}{9} - \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$

donc $\sin(3\alpha) = \frac{1}{3} \times \frac{7}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{9} \times -\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{7}{27} + \frac{16}{27} = \frac{23}{27}$

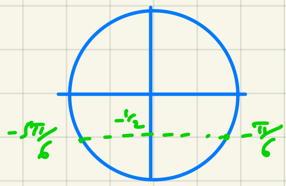
Exercice 13 :

1) Résoudre $sin(x) = -\frac{1}{2}$ dans IR.

2) Résoudre $cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ dans IR puis dans] π ; π].

1) $\sin x = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}\ (2\pi)$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$

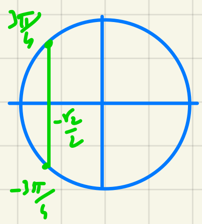


$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6}\ (2\pi)\ ;\ -\frac{5\pi}{6}\ (2\pi)\right\}$

2) $\cos(2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{8}\ (\pi)$



$\frac{3\pi}{8} - \pi = -\frac{5\pi}{8}$ et $-\frac{3\pi}{8} + \pi = \frac{5\pi}{8}$

$S_{\mathbb{R}} = \left\{\pm\frac{3\pi}{8}\ (\pi)\right\}$

$S_{]-\pi,\pi]} = \left\{\pm\frac{3\pi}{8}\ ;\ \pm\frac{5\pi}{8}\right\}$

3) Résoudre $cos(x) + sin(x) = 1$ dans IR puis dans [0 ;2 π].
question supplémentaire : tracer la courbe représentative de $f(x) = cos(x) + sin(x)$ et vérifier graphiquement les résultats obtenus à la question 3)

On écrit $\cos x + \sin x$ sous la forme $C\cos(x-\varphi)$

$A\cos x + B\sin x = C\cos(x-\varphi)$

$C = \sqrt{A^2+B^2}$

$\cos\varphi = \frac{A}{C}$ et $\sin\varphi = \frac{B}{C}$

$C = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

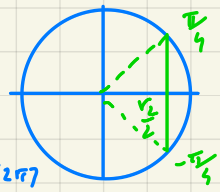
donc $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$

$\cos x + \sin x = 1 \iff \sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}) = 1$

$\iff \cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

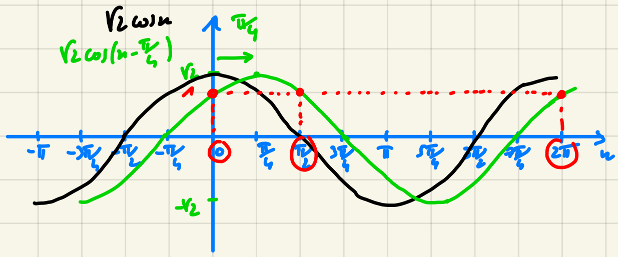
$\iff \cos(x-\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\iff x-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ ou $x-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$



$\iff x = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ ou $x = 0\ [2\pi]$

$S_{\mathbb{R}} = \{\frac{\pi}{2}[2\pi] ; 0[2\pi]\}$ et $S_{[0,2\pi]} = \{0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\}$



tracé de $\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4})$:

- Amplification de $\sqrt{2}$
- Décalage de $\frac{\pi}{4}$ vers la droite

Exercice sup 2 :

Mettre sous forme algébrique :

$A = (1 - j\sqrt{3})^2$ $\quad B = (2 - j)^4$ $\quad C = \frac{2}{1-j} + \frac{2}{1+j}$

$A = (1-j\sqrt{3})^2 = 1 - 2j\sqrt{3} + (j\sqrt{3})^2 = 1 - 2j\sqrt{3} - 3 = -2 - 2j\sqrt{3}$

$B = (2-j)^4 = 2^4 - 4\times 2^3 j + 6\times 2^2 j^2 - 4\times 2 j^3 + j^4$

$= 16 - 32j + 24j^2 - 8j^3 + j^4$

$= 16 - 32j - 24 + 8j + 1$

$= -7 - 24j$

1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$j^2 = -1$
$j^3 = j^2 \times j = -j$
$j^4 = j^2 \times j^2 = 1$

$C = \frac{2}{1-j} + \frac{2}{1+j} = \frac{2(1+j) + 2(1-j)}{(1-j)(1+j)} = \frac{2+2j+2-2j}{1^2+1^2} = \frac{4}{2} = 2$

$(x+jy)(x-jy) = x^2 + y^2$

$$D = j^2 - j^6 + j^8 - j^9 \qquad E = \frac{3-j}{3+j} \qquad F = \sum_{n=0}^{150} j^n$$

$D = j^2 - j^6 + j^8 - j^9$

$j^2 = -1 \qquad j^6 = j^4 \times j^2 = 1 \times (-1) = -1$

$j^8 = j^4 \times j^4 = 1 \qquad j^9 = j^8 \times j = j$

$\Rightarrow D = -1 + 1 + 1 - j = 1 - j$

conjugué de $3+j$

$$E = \frac{3-j}{3+j} = \frac{3-j}{3+j} \times \frac{3-j}{3-j} = \frac{(3-j)^2}{3^2+1^2} = \frac{9-6j+j^2}{10} = \frac{8-6j}{10} = \frac{4-3j}{5}$$

$$F = \sum_{n=0}^{150} j^n = \frac{1-j^{151}}{1-j}$$

somme des termes d'une suite géométrique de raison $q=j$ et de 1er terme $u_0 = 1$: $\sum_{k=0}^{n} u_k = 1^{er}\text{terme} \times \frac{1-q^{\text{nbre de termes}}}{1-q}$

or $j^{151} = j^{148} \times j^3 = j^{37\times 4} \times j^3$

or $148 = 37 \times 4$ donc $j^{148} = (j^4)^{37} = 1$

donc $j^{151} = j^3 = -j$

$$\Rightarrow F = \frac{1+j}{1-j} = \frac{1+j}{1-j} \times \frac{1+j}{1+j} = \frac{1+2j-1}{1^2+1^2} = \frac{2j}{2} = j$$

Exercice 18

Dans tout cet exercice, les nombres manipulés sont des entiers naturels. L'objectif est de démontrer par deux méthodes que : « toute puissance entière d'une somme de deux carrés est elle-même une somme de deux carrés ».

a) Démontrer l'inégalité dite de Lagrange $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. En déduire le résultat recherché en effectuant une démonstration par récurrence.

b) On pose $z = (a + bj)^n = A + Bj$. Calculer $z \times \bar{z}$ et en déduire le résultat voulu.

Rappel : le conjugué $\bar{z}$ d'un nombre complexe $z=x+jy$ est défini par $\bar{z} = x-jy$

a) C'est un simple calcul. (A faire !)

On veut montrer que pour tout entier n, et tous réels a et b, il existe deux réels A et B tels que : $(a^2+b^2)^n = A^2 + B^2$

initialisation : $n=1$ évident, prendre $A=a$ et $B=a$

hérédité : on suppose que c'est vrai au rang n, n fixé, $n \geq 0$

$(a^2+b^2)^n = A^2 + B^2$

$\Rightarrow (a^2+b^2)^{n+1} = (a^2+b^2)^n (a^2+b^2) = (A^2+B^2)(a^2+b^2) = (aA-bB)^2 + (aB+bA)^2 = A'^2 + B'^2$

$\Rightarrow$ vrai au rang $(n+1)$

conclusion : la propriété est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$