DEVOIR MAISON POUR LE VENDREDI 29 OCTOBRE AVANT 17H

2021

Exercice 4

1) Calculer $A_n = \frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}$ puis déterminer la limite de A_n quand n tend vers $+\infty$
2) Calculer $B_n = 2+5+8+...+(2+3n)$ puis déterminer la limite de B_n quand n tend vers $+\infty$
3) Calculer $C_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$ puis déterminer la limite de C_n quand n tend vers $+\infty$

Exercice 6

1) Démontrer que l'on peut écrire $(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2)+a(n+1)(n+2)$ où a est un entier à déterminer.
2) Démontrer par récurrence que $n(n+1)(n+2)+6$ est un multiple de 3 quelque soit l'entier naturel n.
3) Donner une autre méthode pour démontrer le résultat du 2)

Exercice 7

1) Simplifier $(4+x)^3-(4-x)^3$
2) Calculer :

$A=\frac{6!}{4!}$ $B=C_8^6$ $C=\frac{n!}{(n-1)!}$ $D=\frac{2}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}$

3) Montrer que :

$$C_{n-2}^{k-1}+C_{n-2}^{k}=C_{n-1}^{k}$$

Exercice 8 (raccourci)

Mettre sous forme canonique les polynômes suivants puis tracer leur courbe représentative :

a. $P(x)=x^2+4x+6$

b. $Q(x)=x^2-x+1$

Exercice 9 (modifié)

Donnez l'ensemble de définition puis représentez les fonctions suivantes à l'aide de décalages ou d'amplifications :

$f(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $g(x)=1+\sqrt{x-4}$ $h(x)=\ln(x+2)$

CORRECTION DU DEVOIR MAISON

OCTOBRE 2021

Exercice 4

1) Calculer $A_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$ puis déterminer la limite de A_n quand n tend vers $+\infty$
2) Calculer $B_n = 2+5+8+...+(2+3n)$ puis déterminer la limite de B_n quand n tend vers $+\infty$
3) Calculer $C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$ puis déterminer la limite de C_n quand n tend vers $+\infty$

forme $u_0 q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow u_0 = 1,\ q = \frac{1}{3}$

1) $A_n = \frac{1}{3} \overset{\times 1/3}{+} \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k}$

Calculons A_n : on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique

de raison $q = \frac{1}{3}$ nbre de terme = dernier indice − premier indice +1 $= n - 1 + 1 = n$

$A_n = 1^{er}\text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nbre de terme}}}{1-q} = \frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$

$A_n = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \frac{1}{2}$ car $\frac{1}{3} < 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3^n} = 0$

forme $u_0 + rn = 2 + 3n \Rightarrow u_0 = 2$ et $r = 3$

2) $B_n = 2 \overset{+3}{+} 5 \overset{+3}{+} 8 + \dots + (2+3n) = \sum_{k=0}^{n} (2+3k)$

Calculons B_n : on reconnaît la somme des termes d'une suite arithmétique

de raison $r = 3$ nbre de terme = dernier indice − premier indice +1 $= n - 0 + 1 = n+1$

$B_n = \text{nbre de termes} \times \frac{1^{er}\text{ terme} + \text{dernier terme}}{2} = (n+1) \times \frac{2 + 2 + 3n}{2} = \frac{(n+1)(4+3n)}{2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = +\infty$ de manière immédiate.

3) $C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$

1ère méthode : écrire sans Σ

$C_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}\right)$

$C_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2}$ $\qquad \lim\limits_{n\to+\infty} C_n = -\frac{1}{2}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0$

2^e méthode : changement d'indice. On pose $k+2 = k'+1 \Leftrightarrow k' = k+1$ dans la 1ère somme.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k'=1}^{n+1} \frac{1}{k'+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}$$

k	0	n
k'	1	$n+1$

$k' = k+1$

$$= \frac{1}{n+1+1} - \frac{1}{1} = \frac{1}{n+2} - 1$$

Exercice 6

1) Démontrer que l'on peut écrire $(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2) + a(n+1)(n+2)$ où a est un entier à déterminer.
2) Démontrer par récurrence que $n(n+1)(n+2)+6$ est un multiple de 3 quelque soit l'entier naturel n.
3) Donner une autre méthode pour démontrer le résultat du 2)

1) $(n+1)(n+2)(n+3) = (\boxed{n}+\boxed{3})(n+1)(n+2)$

$= \boxed{n}(n+1)(n+2) + \boxed{3}(n+1)(n+2)$

donc $a = 3$

2) $P(n)$: $n(n+1)(n+2)+6$ est un multiple de 3

Initialisation : si $n=0$ $\quad 6 = 2\times 3$ donc $P(0)$ est vrai

Hérédité : $P(n) \Rightarrow P(n+1)$?

on suppose que $n(n+1)(n+2)+6$ est un multiple de 3 pour un n fixé, $n \geq 0$

on démontre que $(n+1)(n+2)(n+3)+6$ est un multiple de 3

on a $(n+1)(n+2)(n+3)+6 = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2) + 6$ d'après le 1)

$$= \underbrace{n(n+1)(n+2)+6}_{\text{multiple de 3 d'après } P(n)} + \underbrace{3(n+1)(n+2)}_{\text{multiple de 3}}$$

donc $P(n+1)$ est vrai

Conclusion : $P(n)$ est vrai $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Les nombres n, $n+1$ et $n+2$ sont consécutifs donc au moins l'un des trois est un multiple de 3 donc $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 3

donc $n(n+1)(n+2)+6$ aussi (car $6 = 2\times 3$)

Exercice 7

1) Simplifier $(4+x)^3-(4-x)^3$
2) Calculer :

$$A=\frac{6!}{4!} \qquad B=C_8^6 \qquad C=\frac{n!}{(n-1)!} \qquad D=\frac{2}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}$$

3) Montrer que :

$$C_{n-2}^{k-1}+C_{n-2}^{k}=C_{n-1}^{k}$$

1)
1 1
1 2 1
1 3 3 1

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ (signe alterné)

$$(4+x)^3=4^3+3\times4^2\times x+3\times4\times x^2+x^3$$

$$\ominus\ (4-x)^3=4^3-3\times4^2x+3\times4x^2-x^3$$

$$\Rightarrow (4+x)^3-(4-x)^3=2\times3\times4^2x+2x^3=96x+2x^3$$

2) $$A=\frac{6!}{4!}=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4}=5\times6=30$$

$$B=C_8^6=\frac{8!}{6!\,2!} \qquad C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$B=C_8^6=\frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8}{1\times2\times3\times4\times5\times6\times1\times2}=\frac{7\times8}{2}=7\times4=28$$

$$C=\frac{n!}{(n-1)!}=\frac{1\times2\times\dots\times(n-1)\times n}{1\times2\times\dots\times(n-1)}=n$$

$$D=\frac{2}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}=\frac{2}{(n+1)!}+\frac{1\times(n+1)}{n!\times(n+1)}=\frac{2}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+1)!}=\frac{n+3}{(n+1)!}$$

3)

$$C_{n-2}^{k-1}+C_{n-2}^{k}=\frac{(n-2)!}{(k-1)!\,(n-2-(k-1))!}+\frac{(n-2)!}{k!\,(n-2-k)!}$$

$$=\frac{(n-2)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}+\frac{(n-2)!}{k!\,(n-k-2)!}$$

On remarque que $k! = (k-1)!\,k$ et $(n-k-1)! = (n-k-2)!\,(n-k-1)$

donc $C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k} = \dfrac{(n-2)!\,k}{k!\,(n-k-1)!} + \dfrac{(n-2)!\,(n-k-1)}{k!\,(n-k-1)!}$

$= \dfrac{(n-2)!\,(k+n-k-1)}{k!\,(n-k-1)!}$

$= \dfrac{(n-2)!\,(n-1)}{k!\,(n-k-1)!}$

$= \dfrac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!}$

$= C_{n-1}^{k}$

Exercice 8 (raccourci)

Mettre sous forme canonique les polynômes suivants puis tracer leur courbe représentative :

a. $P(x) = x^2 + 4x + 6$

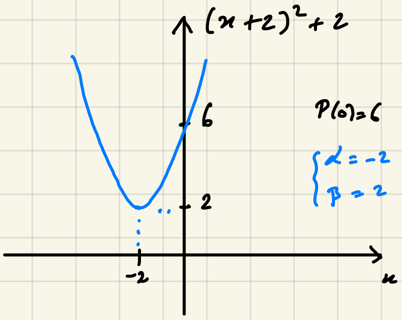
b. $Q(x) = x^2 - x + 1$

a) $P(x) = x^2 + 4x + 6 = x^2 + 2\times 2x + 2^2 - 2^2 + 6$

$= (x+2)^2 - 2^2 + 6$

$= (x+2)^2 + 2$ forme canonique

Décalage de 2 vers la gauche et de 2 vers le haut



Remarque : pas de racine car $P(x) = \underbrace{(x+2)^2}_{\geq 0} + \underbrace{2}_{>0} > 0$ (ne peut donc pas s'annuler)

ou $\Delta = 4^2 - 4\times 6 = 16 - 24 = -8 < 0$

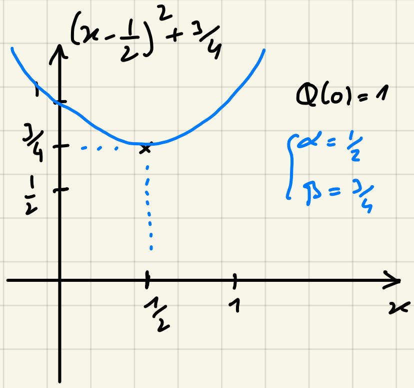
ou Graphiquement : la courbe ne coupe pas l'axe des x

b) $Q(x) = x^2 - x + 1 = x^2 - 2\times\frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1$

$= (x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1$

$= (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ forme canonique

Décalage de $\frac{1}{2}$ vers la droite et de $\frac{3}{4}$ vers le haut



Remarque : pas de racine car $Q(x) > 0$

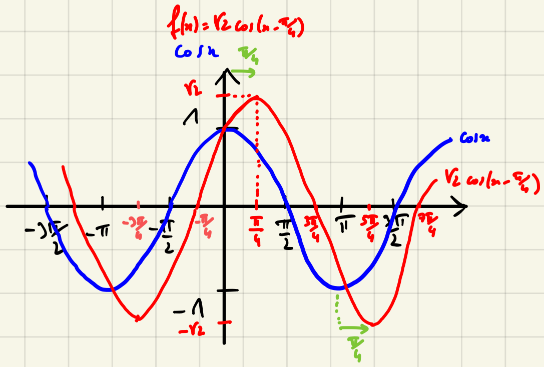
Exercice 9 (modifié)

Donnez l'ensemble de définition puis représentez les fonctions suivantes à l'aide de décalages ou d'amplifications :

$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad g(x) = 1 + \sqrt{x-4}$ $\qquad h(x) = \ln(x+2)$

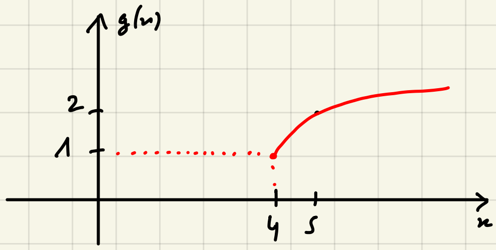
$f(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Amplification de $\sqrt{2}$ et décalage de $\frac{\pi}{4}$ vers la droite



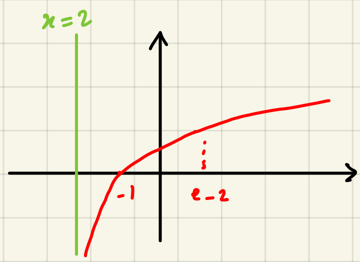
$g(x) = 1 + \sqrt{x-4}$

Décalage de 1 vers le haut et de 4 vers la droite



$g(5) = 2$

$h(x) = \ln(x+2)$ $\qquad$ Décalage de 2 vers la gauche



- $\lim\limits_{x \to -2^+} \ln(x+2) = -\infty$

  $\Rightarrow x = -2$ est asymptote verticale

- $h(-1) = \ln(1) = 0$ et $h(e-2) = \ln(e) = 1$