SERIES ENTIERES

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge pour tout $|x| < R$ où R est le rayon de convergence.

Calcul du rayon de convergence :

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{avec} \quad L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{(critère de d'Alembert)}$$

$$L = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{(critère de Cauchy)}$$

Deux exemples fondamentaux :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall |x| < 1, \qquad \text{Série géométrique de raison } x$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \text{Fonction exponentielle}$$

La fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est dérivable sur]-R ;R[.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad \int f(x)dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \forall |x| < R$$

conséquence : $\boxed{a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}}$

on retrouve les coefficients des DLs en 0.

Conservation du domaine de convergence par dérivation et intégration

3 méthodes pour déduire d'autres développements en série entière

méthode 1 : par changement de variable du type $\boxed{X = \lambda x^p}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$

exemple : on sait que $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ si $|x|<1$ donc $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)}$

on pose $X = -x^2 \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ si $|-x^2|<1$ càd $|x|<1$

méthode 2 : par dérivation / intégration de série entière

exemple : on sait que $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

or on a vu ci-dessus que $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ si $|x|<1$

donc, par intégration, $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$ si $|x|<1$

Comme $\arctan 0 = 0$, on trouve $C=0$ donc $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

exemple 2 : $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ $\forall |x|<1$ donc $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ si $|x|<1$

et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int \frac{dx}{1-x} = -\ln|1-x| + C$ $\forall |x|<1$; $\ln 1 = 0$ donne $C=0$

méthode 3 : par combinaison de séries entières (linéaire ou avec un facteur x^p)

exemple 1

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2-x}$$

$$= \frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n}_{\text{si } |x|<1} - \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n}_{\text{si } \left|\frac{x}{2}\right|<1 \text{ soit } |x|<2} \quad \text{si } |x|<1$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^n \quad \text{si } |x|<1$$

exemple 2

$$e^{2x} - xe^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} - x\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}}_{n'=n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

changement d'indice

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n - \sum_{n'=1}^{+\infty} \frac{x^{n'}}{(n'-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\right) x^n + \underbrace{1}_{n=0}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n - n}{n!} x^n \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Claire Schmidt
IUT de Cachan
GEII1 - S3