3

EQUATIONS ET SYSTEMES D'EQUATIONS

S1

V1

CHAPITRE 3 : EQUATIONS ET SYSTEMES

I RESOLUTION D'EQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

1) Equation à réponse immédiate

	Equation	Analyse	Ensemble des solutions
1	$0x = 12$	c'est impossible	$S = \emptyset$
2	$x^2 = 9$	$x^2 = 9 \iff x = \pm 3$	$S = \{-3 ; 3\}$
3	$6x = 0$	Règle du produit nul $\Rightarrow x = 0$	$S = \{0\}$
4	$0x = 0$	c'est toujours vrai	$S = \mathbb{R}$
5	$x^2 = -3$	c'est impossible	$S = \emptyset$
6	$\lvert x \rvert = 6$	$x = 6$ ou $x = -6$	$S = \{6 ; -6\}$
7	$(x-1)(x+2) = 0$	Règle du produit nul $x - 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$	$S = \{1 ; -2\}$
8	$\dfrac{x-4}{x+6} = 0$	$x = 4$ $x \neq -6$ $\quad -6$ = valeur interdite	$S = \{4\}$

2) Equations du premier degré, de type $ax + b = 0$ $\quad a \neq 0$

L'unique solution est $x = -\dfrac{b}{a}$ $\quad a \neq 0$

On note $S = \left\{ -\dfrac{b}{a} \right\}$

ex 1 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $-\pi x - 3 = 9 - 5(x+1)$

$$\iff -\pi x + 5x = 9 - 5 + 3$$

$$\iff (-\pi + 5)x = 7$$

$$\iff x = \frac{7}{-\pi + 5} \qquad S = \left\{ \frac{7}{-\pi + 5} \right\}$$

Pour la fois prochaine :

Exercice 19

Démontrer : 1) $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} = \frac{n(n-1)}{p(p-1)} C_{n-2}^{p-2}$ 2) $C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$

Exercice 2

Résoudre les équations et inéquations

a.	$x^2 - 5x + 4 = 0$	b.	$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$	c.	$x^2 - 5\|x\| + 4 = 0$
d.	$x^2 - 5x + 4 < 0$	e.	$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$	f.	$x^2 - 5\|x\| + 4 \geq 0$

Ex 19 1) $\frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1} = \frac{n}{p} \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}$

$= \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$= C_n^p$

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$n \times (n-1)! = n!$

$p \times (p-1)! = p!$

Ex 2 a) $x^2 - 5x + 4 = (x-1)(x-4)$ $x_1 = 1$ et $x_2 = 4$

$4 = 2 \times 2 = 4 \times 1 = -2 \times -2 = -4 \times -1$ (On peut aussi utiliser Δ)

b) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ $X = x^2$

$\Leftrightarrow X^2 - 5X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = 1$ ou $X = 4$

$\Leftrightarrow x^2 = 1$ ou $x^2 = 4$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$ ou $x = \pm 2$ $S = \{\pm 1 ; \pm 2\}$

d) $x^2 - 5x + 4 < 0$ est du signe de $a = 1$ à l'extérieur des racines

x		1		4	
$x^2 - 5x + 4$	+	0	−	0	+

$S =]1 ; 4[$

2) Equations du second degré, de type $ax^2+bx+c=0$ $\quad a \neq 0$

On souhaite résoudre $ax^2+bx+c=0$ $\quad$ Rappel : $(x+d)^2 = x^2 + 2dx + d^2$

On met sous forme canonique : $a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0$ $\quad d=\frac{b}{2a}$

$$\iff a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\iff a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\iff a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right)=0$$

$\Delta = b^2-4ac$

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

$$\iff a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=0$$

$$\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0 \qquad a\neq 0$$

$$\iff \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

Si $\Delta>0$ $\quad x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\iff x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Si $\Delta=0$ $\quad \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0 \iff x=-\frac{b}{2a}$

Si $\Delta<0$ $\quad$ pas de solution dans $\mathbb{R}$

A retenir : Soit l'équation $ax^2+bx+c=0$ et $\Delta = b^2-4ac$ $(a\neq 0)$

Si $\Delta>0$ l'équation admet 2 solutions $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta=0$ l'équation admet 1 solution $x_0=\dfrac{-b}{2a}$

Si $\Delta<0$ l'équation admet aucune solution dans $\mathbb{R}$

Ex 1 : Mettre sous forme canonique, factoriser (lorsque cela est possible) puis donner l'ensemble des solutions dans IR

a) $x^2+2x+2=0$

$(x+d)^2 = x^2+2dx+d^2$ $\quad d=1$

$x^2+2x+2=0$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1^2-1^2+2=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+1=0$ forme canonique

$\Leftrightarrow (x+1)^2=-1\leq 0$ impossible

$S=\emptyset$

b) $x^2+8x-33=0$

$d=4$

$x^2+2\times 4x+4^2-4^2-33=0$

$\Leftrightarrow (x+4)^2-16-33=0$

$\Leftrightarrow (x+4)^2-49=0$ $\qquad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

forme canonique $\qquad a=x+4$, $b=7$

$\Leftrightarrow (x+4-7)(x+4+7)=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+11)=0$ forme factorisée

$\Leftrightarrow x=3$ ou $x=-11$ $\qquad S=\{3;-11\}$

c) $2x^2-6x+4=0$

$\Leftrightarrow 2(x^2-3x+2)=0$ $\quad d=\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0$ car $2\neq 0$

$\Leftrightarrow x^2-2\times\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0$ $\qquad a^2-b^2$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0$ $\qquad a=x-\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=2$ ou $x=1$

$S=\{1;2\}$

d) $6x^2+6x+2=0$

$\Leftrightarrow \cancel{6}\left(x^2+x+\frac{1}{3}\right)=0$ $\quad d=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x^2+2\times\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}=0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0}+\underbrace{\frac{1}{12}}_{>0}=0$ $\qquad S=\emptyset$

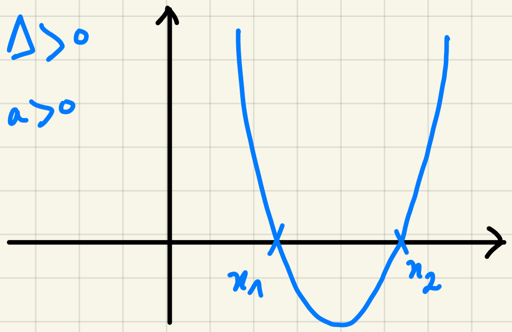
Remarque : on peut factoriser + rapidement

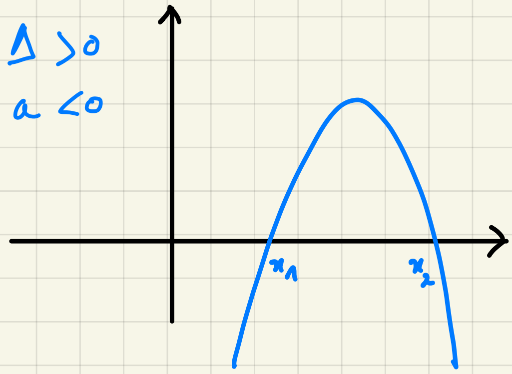
$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad (\Delta>0)$

$2=1\times 2=-1\times -2$

Illustration : Une fonction $f(x) = ax^2+bx+c$ est représentée par une parabole.





x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
signe de ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

Si $\Delta > 0$, ax^2+bx+c est du signe de a à l'extérieur des racines

De plus, $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

Exemple 2

Résoudre $\dfrac{x^2-4x-5}{-x+1} < 0$

$x+1=0 \iff x=-1$

$x^2-4x-5 = (x+1)(x-5)$ $\qquad x_1 = -1$ et $x_2 = 5$

$-5 = -1 \times 5 = -5 \times 1$

$-x+1=0 \iff x = 1$

$f(x)$

$$\frac{x^2-4x-5}{-x+1} < 0$$

$x^2-4x-5 = (x+1)(x-5)$

x	$-\infty$		-1		1		5		$+\infty$
$-x+1$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2-4x-5		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Ne pas oublier les valeurs interdites ! $\rightarrow$ $x = 1$ est valeur interdite

$S =]-1 ; 1[\cup]5 ; +\infty[$

<u>Propriété</u> : Si $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

alors $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

<u>Preuve</u> : $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

$= a(x^2 - x_2 x - x_1 x + x_1 x_2)$

$= ax^2 - ax_2 x - ax_1 x + ax_1 x_2$

$= ax^2 - ax(x_1+x_2) + ax_1 x_2$

$$\begin{cases} a = a \\ b = -a(x_1+x_2) \Rightarrow b = -aS \Rightarrow S = -\frac{b}{a} \\ c = ax_1 x_2 \Rightarrow c = aP \Rightarrow P = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$a \neq 0$

<u>Ex 3</u> : Soit $P(x) = x^2 - 7x + 6$

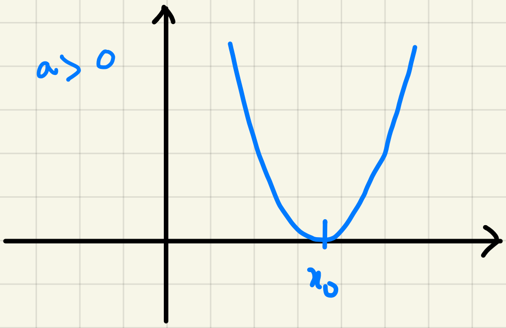
Déterminer une racine évidente puis factoriser P

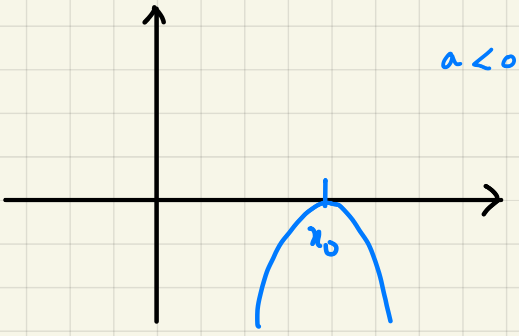
$P(1) = 1 - 7 + 6 = 0$ donc 1 est racine évidente de P

$P(x) = x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$

$x_1 x_2 = \frac{c}{a} \Leftrightarrow 1 \times x_2 = \frac{6}{1} \Leftrightarrow x_2 = 6$

Si $\Delta = 0$: Une seule solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$

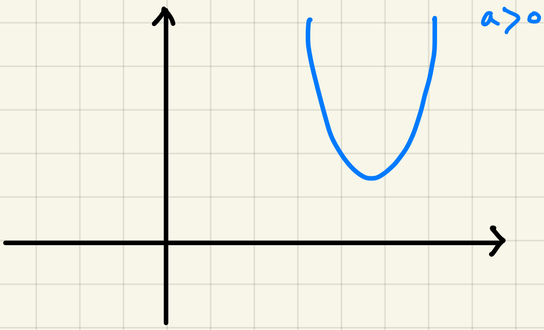


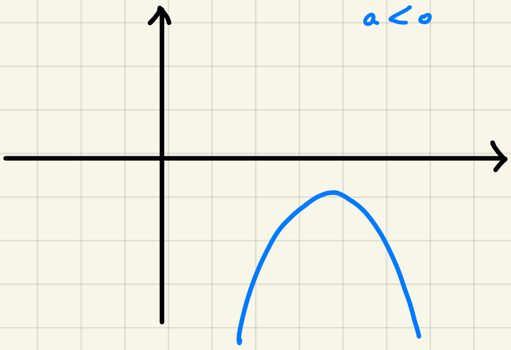


Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a

$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

Si $\Delta < 0$:





Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a

On ne peut pas factoriser $ax^2 + bx + c$.

Ex 3 : Etudier le signe de $P(x) = 4x^2 - 4x + 1$

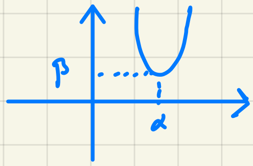
$\Delta = 4^2 - 4 \times 4 = 0$ $\qquad x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

P est du signe de $a = 4$ donc $P(x) \geqslant 0$

2e méthode : $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geqslant 0$ s'annule en $\frac{1}{2}$

Un polynôme du 2nd degré peut se mettre sous 3 formes :

- développée $ax^2 + bx + c$
- factorisée $a(x - x_1)(x - x_2)$ si $\Delta > 0$ $a(x - x_0)^2$ si $\Delta = 0$
- canonique $a(x - \alpha)^2 + \beta$



$S(\alpha, \beta)$ est le sommet

β = minimum ou maximum

Ex 4 : Factoriser le plus simplement possible (sans calculer Δ)

1) $x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1)$ $S = \{-5, 1\}$

$\hookrightarrow x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 - 5$

$(x+2)^2 - 9$ forme canonique

2) $x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2)$ $S = \{-3 ; 2\}$

3) $x^2 - 5x - 14 = (x+2)(x-7)$ $S = \{-2, 7\}$

$-14 = -14 \times 1 = 14 \times -1 = 2 \times -7 = -2 \times 7$

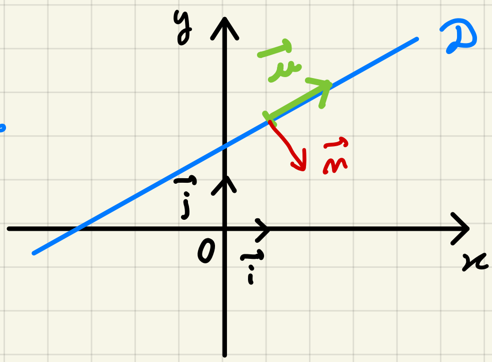
4) $2x^2 + x - 1 = (2x - 1)(x + 1)$ $S = \{\frac{1}{2} ; -1\}$

$-1 = -1 \times 1 = 1 \times -1$

II Résolution de systèmes d'équations

1) Equation de droite

On se place dans le plan orthonormé, repéré par $(O, \vec{i}, \vec{j})$



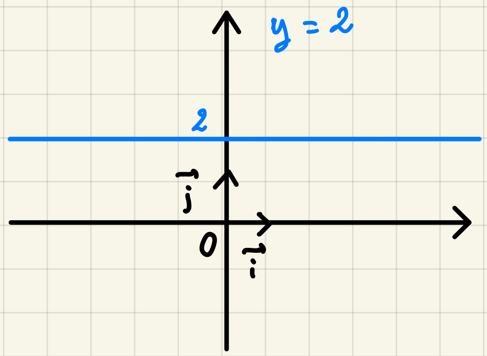
L'équation cartésienne d'une droite s'écrit sous la forme :

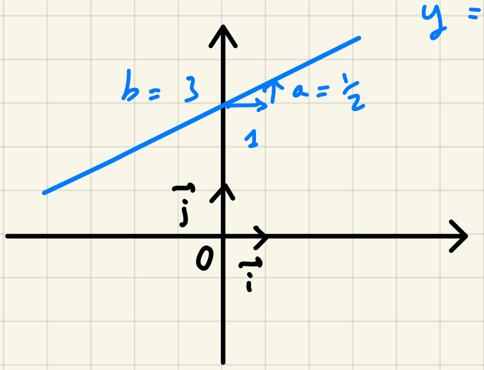
$$ax + by + c = 0 \qquad a, b, c \text{ réels}, \quad (a,b) \neq (0,0)$$

Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(-b, a)$

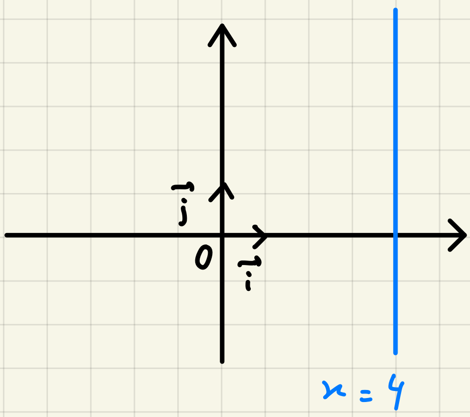
Un vecteur normal de cette droite est $\vec{n}(a, b)$

Attention : tout vecteur colinéaire à $\vec{u}$, c'est à dire de la forme $k\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de $\mathcal{D}$.





$y = \frac{1}{2}x + 3$



$b \neq 0$

$ax + by + c = 0 \Rightarrow by = -ax - c$

$\Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

$\vec{u}(1, -\frac{a}{b})$

$b\vec{u}(b, -a)$

$-b\vec{u}(-b, a)$

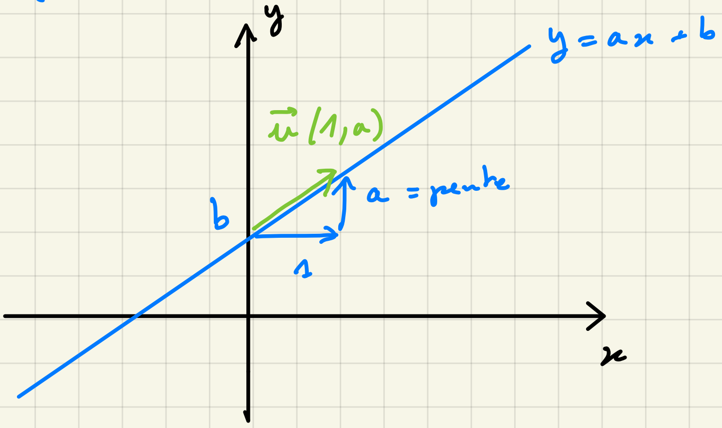
Rappels :

$y = ax + b$

$\vec{u}\,(1, a)$

b = ordonnée à l'origine

a = pente = coeff dir.



A, B deux point de $\mathcal{D}$

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exercice 1 : $a = 2 \quad b = -1 \quad c = -2$

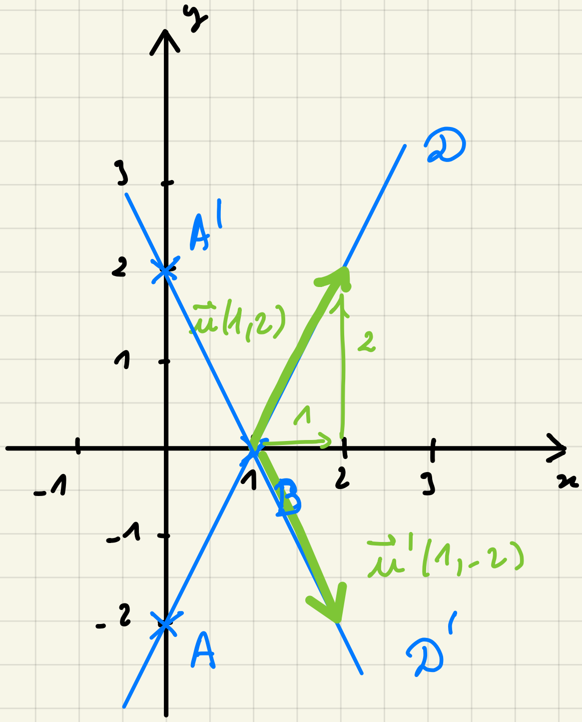
1) Tracer la droite $\mathcal{D} : 2x - y - 2 = 0$

$\vec{u}\,(\overset{-b}{1}, \overset{a}{2}) \qquad A\,(0, -2) \qquad B\,(1, 0)$

$2 \times 0 - y - 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

2) Tracer la droite $\mathcal{D}' : -2x - y + 2 = 0$

$\vec{u}\,'(1, -2) \qquad A'(0, 2) \qquad B'(1, 0)$



3) Résoudre graphiquement le système

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 \\ -2x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

point d'intersection de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

$= B \qquad S = \{(1, 0)\}$

4) Retrouver le résultat par le calcul.

$$\begin{cases} 2x - y - 2 = 0 & (L_1) \\ -2x - y + 2 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

méthode 1 : PAR SUBSTITUTION

$y = 2x - 2$

$\Rightarrow -2x - (2x - 2) + 2 = 0$ calculatoire ...

méthode 2 : PAR COMBINAISON

$(L_1) - (L_2) \quad 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \qquad S = \{(1, 0)\}$

$(L_1) + (L_2) \quad -2y = 0 \Rightarrow y = 0$

Résoudre un système linéaire à 2 équations et 2 inconnues x et y revient à déterminer les points d'intersection de deux droites D et D'

$$(S) \begin{cases} ax + by + c = 0 & \mathcal{D} \\ a'x + b'y + c' = 0 & \mathcal{D}' \end{cases}$$

3 cas possibles :

- Si D et D' sont sécantes

- Si D et D' sont strictement parallèles

- Si D et D' sont confondues

$$(S)\begin{cases} ax + by + c = 0 & \mathcal{D} \\ a'x + b'y + c' = 0 & \mathcal{D}' \end{cases}$$

<u>Définition</u>: On appelle déterminant du système linéaire (S)

et on note $\det(S) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

<u>Propriété</u> : Les droites sont parallèles si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$

Dans ce cas, le système admet soit 0 solution, soit une infinité de solution

(D et D' strictement parallèles) (D et D' confondues)

<u>Conséquence</u>: Les droites sont sécantes si et seulement si $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$

Dans ce cas, le système admet 1 solution

<u>Ex1</u>: Soit

$$(S)\begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 & (L_1) \\ -x + 2y - 1 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$$\det S = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2 - (-1)(-4) = 6 - 4 = 2 \neq 0$$

Calculer $\det(S)$. Que peut-on en déduire ? une seule solution

Donner l'ensemble des solutions du système.

$$\left.\begin{array}{lll} (L_1) + 3(L_2) & 2y - 1 = 0 & \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ (L_1) + 2(L_2) & x = 0 & \end{array}\right\} \quad S = \left\{ \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \right\}$$

Ex 2 : Soit

$$(S)\begin{cases} \sqrt{2}\,x - y + 1 = 0 & D \\ 2x - \sqrt{2}\,y - 1 = 0 & D' \end{cases}$$

Calculer det(S). Que peut-on en déduire ?

Donner l'ensemble des solutions du système.

$$\det S = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2}\times(-\sqrt{2}) - 2\times(-1) = -2 + 2 = 0$$

$\Rightarrow$ Soit les droites sont // : pas de solution

Soit les droites sont confondues : une infinité de solution

$D : \sqrt{2}x - y + 1 = 0 \quad (\times\sqrt{2}) \Rightarrow 2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0$

$$\begin{cases} 2x - \sqrt{2}y + \sqrt{2} = 0 & (L_1) \\ 2x - \sqrt{2}y - 1 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

$D // D'$ aucune solution

$(L_1) - (L_2) \quad \sqrt{2} + 1 = 0$ impossible $\emptyset$

$\mathcal{D}$: $ax + by + c = 0$ dans le plan

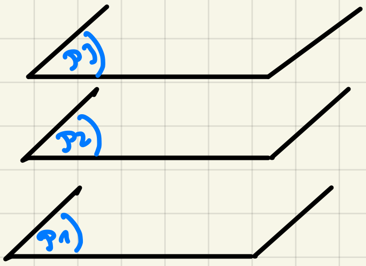
$\mathcal{P}$: $ax + by + cz + d = 0$ dans l'espace

Remarque :

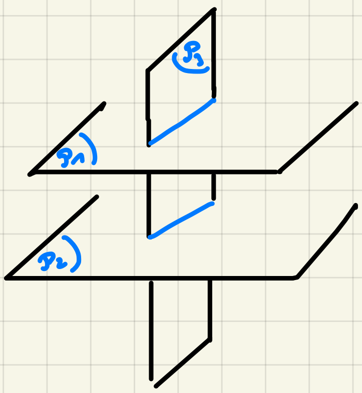
Système linéaire à 3 équations et 3 inconnues : $\downarrow$ x, y et z

$$(S)\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

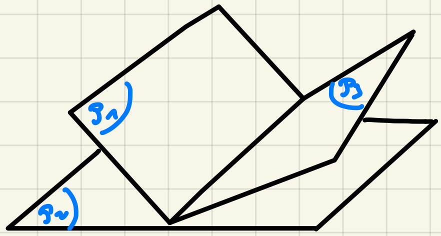
Résoudre le système (S) revient à étudier l'intersection de 3 plans



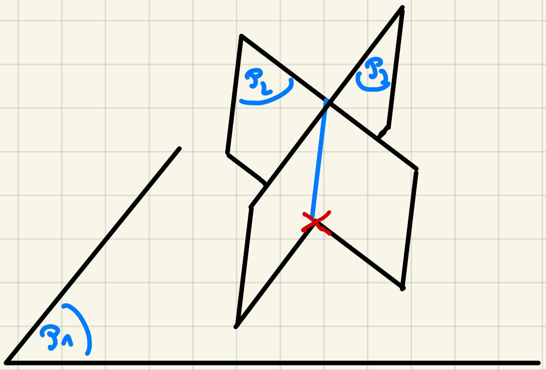
$S = \emptyset$



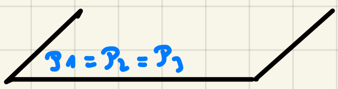
$S = \emptyset$



S = une droite de solution (à préciser selon l'exercice)



S = un point



S = un plan de solution

Exercice 3 : Factoriser dans **R** (lorsque cela est possible), mettre sous forme canonique (sinon), puis résoudre dans **R** :

$(x+1)^2-1^2+2 = (x+1)^2+1$

$A: x^2+2x+2=0 \quad B: -x^2+2x+1=0 \quad C: \frac{1}{2}x^2-x+4=0$

$D: -x^2+2\sqrt{2}x-1=0 \quad E: 7x^2+6x+5=0$

Exercice 4 :

1/ Factoriser dans **R** (lorsque cela est possible), mettre sous forme canonique (sinon), puis résoudre dans **R** :

$A: 9x^2 \geq 30x-25 \quad B: 70x < 25x^2+49 \quad C: (2x-5)^2 > 5-2x$

2/ Résoudre dans IR :

a) $x^2-2x-3=0$ b) $x^2-x-30<0$ c) $2x^4-x^2-1=0$

3 / Mettre sous forme canonique puis résoudre dans IR :

a) $x^2+2x+5=0$ b) $2x^2+6x+2=0$

ex 3

$B: -x^2+2x+1=0 \iff -(x^2-2x-1)=0$

$\iff x^2-2x-1=0$

$\iff (x-1)^2-1^2-1=0$

$\iff (x-1)^2-2=0$

$\iff (x-1)^2-(\sqrt{2})^2=0$

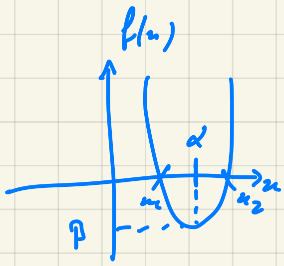
$\iff (x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})=0$

$\iff x=1+\sqrt{2}$ ou $x=1-\sqrt{2}$

$C: \frac{1}{2}x^2-x+4=0 \iff \frac{1}{2}(x^2-2x+8)=0$

$\iff \frac{1}{2}((x-1)^2-1^2+8)=0$

$\iff (x-1)^2+7=0$



$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)^2+\beta$

$\alpha = \frac{-b}{2a}$ $\beta = f(\alpha)$

milieu de

$\begin{cases} x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$

Exercice 9 : Examiner le parallélisme des droites D_1, D_2, D_3, D_4 définies ci-dessous :

$\boxed{\text{Dans 15 min}}$ (15h50)

↳ Zoom (rapide)

$$D_1 : \sqrt{2}x + (\sqrt{2}-1)y = 2 \quad ; \quad D_2 : (2+\sqrt{2})x - y = 2\sqrt{2}$$

$$D_3 : (2-\sqrt{2})x + (2\sqrt{2}-3)y = \sqrt{2}-1 \quad ; \quad D_4 : x + \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)y = \sqrt{2}$$

Préciser les droites confondues ou strictement parallèles.

Exercice 10 : Trouver deux nombres connaissant leur somme 22 et la somme de leurs carrés 1 042.

Exercice 11 : Résoudre par la méthode de Gauss :

$$(a)\begin{cases} 2x+5y=-9 \\ x+7y=-15 \end{cases} \qquad (b)\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x+2y=-2 \\ x+(\sqrt{3}+1)y=-1-\sqrt{3} \end{cases} \qquad (c)\begin{cases} (\sqrt{3}-1)x+2y=-2 \\ x+(\sqrt{3}+1)y=\sqrt{3} \end{cases}$$

PAR COMBINAISON

2) Méthode de Gauss

On considère le système linéaire à n équations et n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n & (L_n) \end{cases}$$

Les transformations suivantes transforment un système en un système équivalent :

λ = lambda

1) permuter 2 lignes (L_i) et (L_j)

2) multiplier une ligne par λ $(\lambda \neq 0)$

3) remplacer (L_i) par $(L_i) + \lambda(L_j)$ $(\lambda \neq 0)$

La Méthode de Gauss consiste à utiliser les transformations précédentes pour obtenir un système triangulaire équivalent.

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \dots + a'_{1n}x_n = c'_1 & (L_1) \\ \qquad a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2n}x_n = c'_2 & (L_2) \\ \qquad\qquad a'_{33}x_3 + \dots + a'_{3n}x_n = c'_3 & (L_3) \\ \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots & \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a'_{n-1,n-1}x_{n-1} + a'_{n-1,n}x_n = c'_{n-1} & (L_{n-1}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a'_{nn}x_n = c'_n & (L_n) \end{cases}$$

Il suffit ensuite de remonter pour trouver $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$

Ex 1 : Résoudre à l'aide de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} \boxed{x + y + z = 0 \qquad (L_1)} \\ x + 2y - 3z = 0 \qquad (L_2) \\ x - y - z = 5 \qquad (L_3) \end{cases}$$

← (L_1) est le pivot de Gauss : on l'utilise pour éliminer x dans (L_2) et (L_3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & (L_1) \\ \boxed{y - 4z = 0} & (L_2) - (L_1) \\ -2y - 2z = 5 & (L_3) - (L_1) \end{cases}$$

← (L_2) est le nouveau pivot de Gauss : on l'utilise pour éliminer y dans (L_3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 & (L_1) \\ y - 4z = 0 & (L_2) \\ -10z = 5 & (L_3) + 2(L_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow z = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$ $\Rightarrow y = 4z = 4 \times -\frac{1}{2} = -2$ $\Rightarrow x = -y - z = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$S = \left\{ \left(\frac{5}{2}, -2, -\frac{1}{2} \right) \right\}$ Les 3 plans se coupent en un point $A\left(\frac{5}{2}, -2, -\frac{1}{2}\right)$

Ex 2 : Résoudre à l'aide de la méthode de Gauss :

$$\begin{cases} \boxed{x + 2y - z = 3 \qquad (L_1)} \\ x + y + 2z = 1 \qquad (L_2) \\ 2x + 3y + z = 4 \qquad (L_3) \end{cases}$$

← pivot de Gauss

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 & (L_1) \\ -y + 3z = -2 & (L_2) - (L_1) \\ -y + 3z = -2 & (L_3) - 2(L_1) \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -y + 3z = -2 \end{cases}$$

la méthode bloque !

+ que 2 équations !

Que faire quand le nombre d'équations et le nombre d'inconnues diffèrent?

On considère le système linéaire à p équations et n inconnues $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (L_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + a_{p3}x_3 + \dots + a_{pn}x_n = b_p & (L_p) \end{cases}$$

Cas 1 : Plus d'inconnues que d'équations $n > p$

Que se passe t'il en général ? Il n'y a pas assez de conditions sur les inconnues, donc il y aura le + souvent (mais pas toujours !) une infinité de solutions.

<u>Méthode</u>: on exprime les p premières inconnues en fonction des n-p restantes.

<u>Retour sur l'exemple 2.</u>

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ -y + 3z = -2 \end{cases}$$

3 inconnues, 2 équations $\Rightarrow$ 1 inconnue "en trop"

$\Rightarrow$ on exprime x et y en fonction de z

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 + z \\ -y = -2 - 3z \end{cases}$$

$\Rightarrow y = 2 + 3z$

$x = 3 + z - 2y = 3 + z - 2(2+3z)$

$x = 3 + z - 4 - 6z = -1 - 5z$

donc $\begin{cases} x = -1 - 5z \\ y = 2 + 3z \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 5k \\ y = 2 + 3k \\ z = 0 + k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$

eq. paramétrique de la droite ② passant par $A(-1,2,0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-5,3,1)$

$\shortparallel$

intersection des plans dans l'espace

$S = \{(-1-5z, 2+3z, z), z \in \mathbb{R}\}$

Equation paramétrique d'une droite dans l'espace :

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$

$$M \in \mathcal{D} \iff \vec{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{R} \,/\, \vec{AM} = k\vec{u}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \\ z_{\vec{u}} \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} x - x_A = k\, x_{\vec{u}} \\ y - y_A = k\, y_{\vec{u}} \\ z - z_A = k\, z_{\vec{u}} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = x_A + k\, x_{\vec{u}} \\ y = y_A + k\, y_{\vec{u}} \\ z = z_A + k\, z_{\vec{u}} \end{cases}$$ équation paramétrique de $\mathcal{D}(A, \vec{u})$

Cas 2 : Plus d'équations que d'inconnues $p > n$

Que se passe-t'il en général ? Il y a trop de conditions sur les inconnues, donc il y aura le + souvent (mais pas toujours !) ……aucune…… solution.

Méthode : on ne prend que les n premières équations, on résout ce système à n équations et n inconnues puis on vérifie que la solution obtenue vérifie bien les $(p-n)$ équations restantes.

Ex 3 :

$$\left\{\begin{array}{ll} \boxed{\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x + 2y - 3z = 0 \\ x - y - z = 5 \end{array}} & \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{array} \\ 2x - y + 2z = 6 & (L_4) \\ 4x - y + 6z = 7 & (L_5) \end{array}\right.$$

on résout les 3 premières équations et on teste la solution obtenue dans (L_4) et (L_5)

on a trouvé $S = \{(\frac{5}{2}, -2, -\frac{1}{2})\}$ (voir ex1)

$2 \times \frac{5}{2} + 2 + 2 \times -\frac{1}{2} = 5 + 2 - 1 = 6$ ✓

$4 \times \frac{5}{2} + 2 + 6 \times -\frac{1}{2} = 10 + 2 - 3 = 9$ ✗

$$S = \emptyset$$

Que faire quand le système n'est pas linéaire ?

Méthode : On essaie de se ramener à un système linéaire à l'aide d'un changement de variable adapté

ex 4 :

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 0 \\ \sqrt{x} + 2\sqrt{y} - 3\sqrt{z} = 0 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} - \sqrt{z} = 5 \end{cases}$$

on pose $X = \sqrt{x}$ $\quad Y = \sqrt{y}$ $\quad Z = \sqrt{z}$

on est ramené à l'ex1

donc $X = \frac{5}{2}$

$Y = -2$

$Z = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{5}{2} \\ \sqrt{y} = \underbrace{-2}_{} \\ \sqrt{z} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{<0} \end{cases}$$

Impossible !

$$S = \emptyset$$

Exercice 13 : Résoudre par la méthode de Gauss :

$$(a)\begin{cases} x-y+2z=3 \\ 2x-y+z=1 \\ 2y+z=4 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} x+z=1 \\ 2x-y+z=-1 \\ 3x-y+2z=0 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} x+z=1 \\ 2x-y+z=-1 \\ 3x-y+2z=5 \end{cases}$$

Exercice 15: Résoudre par la méthode de Gauss :

$$(a)\begin{cases} x-y+z-u=0 \\ 2x+y-z+2u=0 \\ 2y+3z+u=0 \end{cases} \quad (b)\begin{cases} x+2y-3z=-7 \\ 2x-y+4z=11 \\ 4x+3y-2z=-3 \\ 3x+y+z=4 \end{cases} \quad (c)\begin{cases} 3x+2y+z-u-v=0 \\ x-y-z-u+2v=0 \\ -x+2y+3z+u-v=0 \end{cases}$$

Ex 13 :

pivot de Gauss

pivot de Gauss

$$(a)\begin{cases} x-y+2z=3 & (L_1) \\ 2x-y+z=1 & (L_2) \\ 2y+z=4 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+2z=3 & (L_1) \\ y-3z=-5 & (L_2)-2(L_1) \\ 2y+z=4 & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-y+2z=3 & (L_1) \\ y-3z=-5 & (L_2) \\ 7z=14 & (L_3)-2(L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} z=2 \\ y=-5+3z=-5+6=1 \\ x=3+y-2z=3+1-4=0 \end{cases}$$

$S=\{(0,1,2)\}$

les 3 plans se coupent selon un point $A(0,1,2)$

pivot de Gauss (éliminer les y)

$$(b)\begin{cases} x+z=1 & (L_1) \\ 2x-y+z=-1 & (L_2) \\ 3x-y+2z=0 & (L_3) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y+z=-1 & (L_1) \\ x+z=1 & (L_2) \\ 3x-y+2z=0 & (L_3) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x-y+z=-1 & (L_1) \\ x+z=1 & (L_2) \\ x+z=1 & (L_3)-(L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ x+z=1 \end{cases}$$

2 équations
3 inconnues

$\Rightarrow$ 1 inconnue en trop $\Rightarrow$ on met z en paramètre

$$\begin{cases} 2x-y=-1-z \\ x=1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ y=2x+1+z=2-2z+1+z=3-z \\ z=z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - z \\ y = 2x + 1 + z = 2 - 2z + 1 + z = 3 - z \\ z = z \end{cases}$$

$S = \{(1-z, 3-z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$

Les 3 plans se coupent selon la droite $D(A, \vec{u})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3 - t \\ z = 0 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad A(1, 3, 0) \qquad \vec{u}(-1, -1, 1)$$

coeffs de t

2e méthode

pivot : on élimine les x dans (L_2) et (L_3)

$$(b) \begin{cases} x + z = 1 & (L_1) \\ 2x - y + z = -1 & (L_2) \\ 3x - y + 2z = 0 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 & (L_1) \\ -y - z = -3 & (L_2) - 2(L_1) \\ -y - z = -3 & (L_3) - 3(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ -y - z = -3 \end{cases}$$

2 équations, 3 inconnues

$\longrightarrow y + z = 3$

on met z en paramètre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 3 - z \end{cases} \qquad S = \{(1-z, 3-z, z),\ z \in \mathbb{R}\}$$

pivot

$$(c) \begin{cases} x + z = 1 & (L_1) \\ 2x - y + z = -1 & (L_2) \\ 3x - y + 2z = 5 & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 & (L_1) \\ -y - z = -3 & (L_2) - 2(L_1) \\ -y - z = 2 & (L_3) - 3(L_1) \end{cases}$$

pivot

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 1 & (L_1) \\ -y - z = -3 & (L_2) \\ 0 = 5 & (L_3) - (L_2) \end{cases}$$

impossible

$S = \emptyset$

Les 3 plans ont aucun point d'intersection.

Ex 15

10 minutes

$$(a)\begin{cases} x-y+z-u=0 \\ 2x+y-z+2u=0 \\ 2y+3z+u=0 \end{cases}$$

3 équations
4 inconnues

⇒ 1 inconnue en trop ⇒ on met u en paramètre

pivot pour éliminer les z

$$\begin{cases} x-y+z=u & (L_1) \\ 2x+y-z=-2u & (L_2) \\ 2y+3z=-u & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=u & (L_1) \\ 3y-3z=-4u & (L_2)-2(L_1) \\ 2y+3z=-u & (L_3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z=u & (L_1) \\ 3y-3z=-4u & (L_2) \\ 5y=-5u & (L_3)+(L_2) \end{cases}$$

$\Rightarrow y=-u$

$3z=3y+4u=-3u+4u=u \Rightarrow z=\frac{u}{3}$

$x=u+y-z=u-u-\frac{u}{3}=-\frac{u}{3}$

$$S=\left\{\left(-\frac{u}{3},-u,\frac{u}{3},u\right),u\in\mathbb{R}\right\}$$

$$(b)\begin{cases} x+2y-3z=-7 & (L_1) \\ 2x-y+4z=11 & (L_2) \\ 4x+3y-2z=-3 & (L_3) \\ 3x+y+z=4 & (L_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-7 & (L_1) \\ -5y+10z=25 & (L_2)-2(L_1) \\ -5y+10z=25 & (L_3)-4(L_1) \\ -5y+10z=25 & (L_4)-3(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-7 & (L_1) \\ -5y+10z=25 & (L_2) \end{cases}$$

2 équations
3 inconnues

1 inconnue en trop ⇒ on met z en paramètre

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=-7+3z \\ -5y=25-10z \end{cases}$$

$5y=-25+10z \Rightarrow y=-5+2z$

$\Rightarrow x=-7+3z-2y=-7+3z+10-4z$

$x=3-z$

$$\begin{cases} x=3-z \\ y=-5+2z \\ z=0+z \end{cases}$$

$$S=\{(3-z,-5+2z,z),z\in\mathbb{R}\}$$

$A(3,-5,0)$ $\quad \vec{u}(-1,2,1)$

des plans se coupent selon $\mathcal{D}(A,\vec{u})$

$$(c)\begin{cases} 3x+2y+z-u-v=0 & (L_1) \\ x-y-z-u+2v=0 & (L_2) \\ -x+2y+3z+u-v=0 & (L_3) \end{cases}$$

3 équations

5 inconnues

$\Rightarrow$ 2 inconnues en trop

15 minutes

on met u et v en paramètre.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+z = u+v & (L_1) \\ x-y-z = u-2v & (L_2) \\ -x+2y+3z = -u+v & (L_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+z = u+v & (L_1) \\ -5y-4z = 2u-7v & 3(L_2)-(L_1) \\ 8y+10z = -2u+4v & 3(L_3)+(L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y+z = u+v & (L_1) \\ -5y-4z = 2u-7v & 3(L_2)-(L_1) \\ -9y = 6u-27v & 2(L_3)+5(L_2) \end{cases}$$

$9y = -6u+27v \Rightarrow y = -\frac{2}{3}u + 3v$

$\Rightarrow 4z = -5y-2u+7v$

$4z = -5(-\frac{2}{3}u+3v) - 2u + 7v$

$= \frac{10}{3}u - 15v - 2u + 7v$

$4z = \frac{4}{3}u - 8v$

$\Rightarrow z = \frac{1}{3}u - 2v$

$\Rightarrow 3x = u+v-2y-z$

$3x = u+v-2(-\frac{2}{3}u+3v) - (\frac{1}{3}u-2v)$

$3x = u+v+\frac{4}{3}u - 6v - \frac{1}{3}u + 2v$

$3x = 2u - 3v$

$x = \frac{2}{3}u - v$

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{3}u - v, -\frac{2}{3}u+3v, \frac{1}{3}u-2v, u, v \right), u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour la prochaine fois :

Exercice 1 : Un sudoku particulier, le « sudomaths »[4]

	$\sqrt{25}$		E(π)		48/8			$-(\sqrt{7}i)^2$
				$4\sqrt{4}$	Somme des solutions de : x^2-5x+6 =0		Nombre premier pair	Nombre de faces d'une pyramide à base triangulaire
	$16\cos^4(\pi/6)$	2^3	$8\text{Cos}^2(\pi/4)$	Nombre d'axes de symétrie d'un rectangle		Nombre de faces d'un cube		
$\sqrt{324}/2$		1^0			Numérateur de la fraction irréductible égale à 9261/33 957	Nombre max de solutions d'une équation du second degré		PGCD de 11 760 et 2574
	$1+\sqrt{4}$						$10^{-2}/0,01$	
125/25		Quatrième nombre premier	2 cos 0	Nombre de diviseurs de 20		Numérateur de 7/4 –1/2 + 5/8 – 3/4		$(4\cos\pi/4)^2$
Le quart du seizième de 256		Nombre de côtés d'un pentagone		Nombre qui s'écrit en système binaire 1001		Nombre d'axes de symétrie d'un triangle équilatéral	Nombre de sommets d'un cube	
	$(4\cos(\pi/6))^2/$ 12		Longueur de l'hypoténuse d'un triangle de côté 3 et 4	Nombre de jours de la semaine				$(2\sin\pi/4)^2$
$\frac{\sqrt{192}-\sqrt{128}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$			$2^{?}=2$		Nombre d'axes de symétrie d'un carré		$\sqrt{81}-\sqrt{4}$	