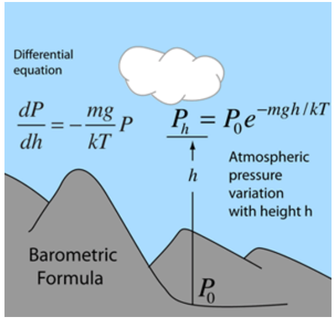
Equations différentielles linéaires

Premier Ordre

Equation du type $y' - ay = 0$ (a = constante)

La solution générale est $y = Ke^{ax}$ (K = constante)



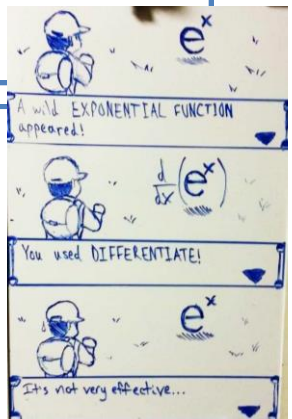
Equation du type $y' - a(x)y = 0$

La solution générale est $y = Ke^{A(x)}$ où $A(x) = \int a(x)dx$

Méthode :

$y' - a(x)y = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = a(x)$ si y ne s'annule pas, puis par intégration :

$\ln|y| = \int a(x)dx + C \Leftrightarrow |y| = e^{\int a(x)dx + C} \Leftrightarrow y = Ke^{A(x)}$



Equation du type $y' - a(x)y = g(x)$ (E)

La solution générale de (E) est $y = y_0 + y_1$ où :

y_0 est la solution générale de $y' - a(x)y = 0$ (Eo)

y_1 est une solution particulière de (E)

Pour déterminer y_1 :

Méthode 1 : on cherche y_1 sous forme polynomiale ou sous une forme similaire à a(x) et g(x).

Méthode 2 : méthode de variation de la constante.
On détermine d'abord $y_0 = Ku(x)$ et on fait varier la constante K, ce qui donne : $y_1 = K(x)u(x)$

On a donc $y_1' = K'(x)u(x) + K(x)u'(x)$

On injecte y_1 dans (E) pour en déduire K' puis K et enfin y_1.

Second Ordre

Equation du type $ay'' + by' + cy = 0$ (E)

L'équation caractéristique associée est $ar^2 + br + c = 0$ (e)

$y'' \leftrightarrow r^2$

$y' \leftrightarrow r$

$y \leftrightarrow 1$

Si $\Delta > 0$, (e) admet 2 solutions r_1 et r_2 et $y = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$

Si $\Delta = 0$, (e) admet 1 solution r_0 et $y = e^{r_0 x}(Ax + B)$

Si $\Delta < 0$, (e) admet 2 solutions conjuguées $r = \alpha \pm j\beta$ et

$y = e^{\alpha x}(C\cos(\beta x) + D\sin(\beta x))$

Equation du type $ay'' + by' + cy = g(x)$ (E)

La solution générale de (E) est $y = y_0 + y_1$ où :

y_0 est la solution générale de $ay'' + by' + cy = 0$ (Eo)

y_1 est une solution particulière de (E)

Si $g(x) = P(x)e^{dx}$ où *P* est un polynôme,

Alors on pose $y_1 = Q(x)e^{dx}$ avec :

$\deg Q = \deg P$ si d n'est pas solution de (e)

$\deg Q = \deg P + 1$ si d est solution simple de (e)

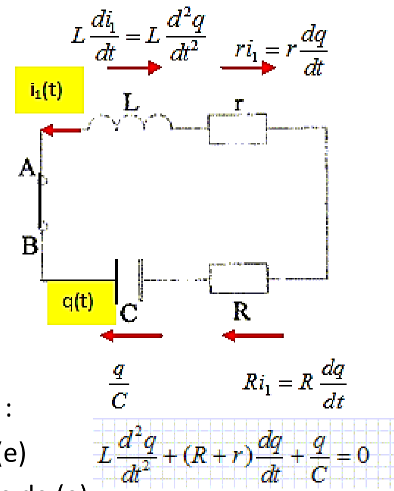
$\deg Q = \deg P + 2$ si d est solution double de (e)

Si $g(x) = P(x)\cos(dx)$ ou $P(x)\sin(dx)$

Alors on pose $y_1 = Q(x)\cos(dx) + R(x)\sin dx$ avec :

$\deg Q = \deg R = \deg P$ si jd n'est pas solution de (e)

$\deg Q = \deg R = \deg P + 1$ si jd est solution simple de (e)



Conditions initiales (pour tout type d'équation différentielle)

On applique les conditions initiales à la fin uniquement !

Elles permettent de trouver la ou les constantes

Claire Schmidt, IUT de Cachan, GEII1