Equations différentielles et Transformation de Laplace

Exemple du cours : résoudre

$$\begin{cases} y''+2y'+y=e^{-t} \\ y(0)=1 \qquad (E) \qquad \textit{pour } t\geq 0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$$

1) Méthode utilisant la transformation de Laplace

- ✓ *On transforme (E) avec la transformation de Laplace.*

$$y \xrightarrow{L} Y$$

$$y' \xrightarrow{L} pY(p)-y(0)=pY(p)-1$$

$$y'' \xrightarrow{L} p^2Y(p)-py(0)-y'(0)=p^2Y(p)-p$$

$$e^{-t} \xrightarrow{L} \frac{1}{p+1}$$

D'où $(E) \xrightarrow{L} p^2Y(p)-p+2pY(p)-2+Y(p)=\dfrac{1}{p+1}$

$$\Leftrightarrow (p^2+2p+1)Y(p)-p-2=\frac{1}{p+1}$$

$$\Leftrightarrow (p+1)^2Y(p)=p+2+\frac{1}{p+1}$$

$$\Leftrightarrow Y(p)=\frac{p+2}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+1)^3}=\frac{1}{p+1}+\frac{1}{(p+1)^2}+\frac{1}{(p+1)^3}$$

- ✓ *Maintenant on détermine y.*

$$\frac{1}{p+1} \xrightarrow{L^{-1}} e^{-t}U(t)$$

$$\frac{1}{(p+1)^2} \xrightarrow{L^{-1}} t\cdot e^{-t}U(t)$$

$$\frac{1}{(p+1)^3} \xrightarrow{L^{-1}} \frac{t^2\cdot e^{-t}}{2}U(t)$$

Donc : $\boxed{y=\left(e^{-t}+t\cdot e^{-t}+\dfrac{t^2\cdot e^{-t}}{2}\right)U(t)}$

2) Méthode classique

- ✓ Résoudre $y''+2y'+y=0 \quad (Eo)$.

On a l'équation caractéristique (e) $r^2+2r+1=0 \Leftrightarrow (r+1)^2=0 \Leftrightarrow r=-1$

Donc $y_0=e^{-t}(At+B)$

- ✓ Trouver une solution particulière de $y''+2y'+y=e^{-t} \quad (E)$.

Il se trouve que le 2nd membre est de la forme e^{dt} avec d=-1 solution double de (e) donc il faut augmenter le degré de 2, donc on pose $y_1=e^{-t}(at^2+bt+c)$

Ici, il suffit même de prendre $y_1=e^{-t}(at^2)$ car le reste figure déjà dans y_0

On calcule alors $y_1'=-e^{-t}(at^2)+2e^{-t}at$ et $y_1''=e^{-t}(at^2)-2e^{-t}at-2e^{-t}at+2e^{-t}a$

On injecte dans (E), ce qui donne :

$$e^{-t}(at^2)-2e^{-t}at-2e^{-t}at+2e^{-t}a+2(-e^{-t}(at^2)+2e^{-t}at)+e^{-t}(at^2)=e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow 2e^{-t}a=e^{-t} \Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

Donc finalement $y_1=\frac{1}{2}e^{-t}t^2$

- ✓ On fait la somme :

$y=y_0+y_1=e^{-t}(At+B)+\frac{1}{2}e^{-t}t^2$ est la solution générale de l'équation différentielle $y''+2y'+y=e^{-t} \quad (E)$

- ✓ On applique les conditions initiales : $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=0 \end{cases}$

On a donc $y(0)=B=1$

De plus, $y'=-e^{-t}(At+B)+e^{-t}A-\frac{1}{2}e^{-t}t^2+e^{-t}t$

donc $y'(0)=-B+A=0 \Leftrightarrow A=B=1$

Au final, $y=y_0+y_1=e^{-t}(t+1)+\frac{1}{2}e^{-t}t^2$

On obtient bien le même résultat.