Un exemple de décomposition en éléments simples

Enoncé : Décomposer en éléments simples puis donner une primitive de : $F(x)=\dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)^2(x^2+1)}$

Solution :

Pour décomposer cette fraction en éléments simples, on remarque qu'il y a un pôle simple (-1), un pôle double 2 et que x^2+1 est un polynôme irréductible dans IR. De plus, degP<degQ, donc on peut décomposer la fraction directement en éléments simples :

$$F(x)=\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)^2(x^2+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

$$A=\left[\frac{2x-1}{(x-2)^2(x^2+1)}\right]_{-1}=\frac{-3}{18}=\frac{-1}{6}$$

$$C=\left[\frac{2x-1}{(x+1)(x^2+1)}\right]_{2}=\frac{1}{5}$$

$$Dj+E=\left[\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)^2}\right]_{j}=\frac{2j-1}{(j+1)(3-4j)}=\frac{2j-1}{7-j}=\frac{-9+13j}{50}\text{ donc } D=\frac{13}{50}\text{ et } E=\frac{-9}{50}$$

Enfin, en multipliant par (x-2) et en faisant tendre x vers $+\infty$:

$$\underbrace{\frac{2x-1}{(x+1)(x-2)(x^2+1)}}_{\to 0}=\underbrace{\frac{A(x-2)}{x+1}}_{\to A}+B+\underbrace{\frac{C}{x-2}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{(Dx+E)(x-2)}{x^2+1}}_{\to D}\quad \text{d'où } 0=A+B+D$$

On en déduit $B=-A-D=\dfrac{1}{6}-\dfrac{13}{50}=\dfrac{25-39}{150}=\dfrac{-14}{150}=\dfrac{-7}{75}$

Au final, $\boxed{F(x)=\dfrac{2x-1}{(x+1)(x-2)^2(x^2+1)}=\dfrac{\frac{-1}{6}}{x+1}+\dfrac{\frac{-7}{75}}{x-2}+\dfrac{\frac{1}{5}}{(x-2)^2}+\dfrac{\frac{13}{50}x-\frac{9}{50}}{x^2+1}}$

Une primitive de F est donc donnée par :

$$\boxed{\int F(x)dx=\frac{-1}{6}\ln|x+1|-\frac{7}{75}\ln|x+2|-\frac{1}{5(x-2)}+\frac{13}{100}\ln(x^2+1)-\frac{9}{50}\arctan x+C}$$